ФГОС ООО

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Часть 1

Издательство БИНОМ

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Часть 1

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я721
П29

*Непрерывный курс математики для дошкольников,
учащихся начальной и основной школы «Учусь учиться»*

Научный руководитель — Л. Г. Петерсон,
доктор педагогических наук, профессор,
директор Центра системно-деятельностной педагогики
«Школа 2000...» ФГАОУ ДПО АПК и ППРО,
академик Международной академии наук педагогического образования,
лауреат Премии Президента РФ в области образования за 2002 год

Петерсон Л. Г.

П 29 Алгебра: 8 класс: В 3 ч. Ч. 1 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 128 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-3227-4 (Ч. 1)
ISBN 978-5-9963-3230-4

Учебное издание ориентировано на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью целостного учебно-методического комплекса «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» ФГАОУ ДПО АПК и ППРО. Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-9963-3227-4 (Ч. 1)
ISBN 978-5-9963-3230-4

Чтобы учебником было удобно пользоваться, в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

– задания базового уровня,

– более сложные задания по новым темам и темам повторения,

* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

■ – завершение доказательства теоремы,

*** – материал для тех, кому интересно.

Глава 1
Язык и логика

§ 1. Искусство математических рассуждений

1. Искусство задавать вопросы

Открытия в математике – это всегда озарения.
Ответ надо звать, и он приходит.

Жак Адамар (1865–1963),
французский математик

В решении любой математической задачи присутствует частица открытия. Новая нестандартная задача заставляет перепробовать множество самых разных способов, а часто и придумывать новые. Задача, открывающая свою тайну только после многократных попыток ее решения, запоминается надолго, а сам процесс решения приносит огромное удовольствие. А значит, чем больше задач будет решено самостоятельно, тем больше занятия математикой будут приносить удовольствие.

Важную роль при построении математических рассуждений играет умение задавать «правильные» вопросы, то есть те вопросы, ответы на которые помогают продвигаться в поисках решения задачи.

Какие же вопросы могут помочь при решении задачи?

Одним из них является вопрос, помогающий определить конечную цель:

<u>Что требуется найти в задаче</u>?

При этом важно не только ответить на этот вопрос, но и понять, что представляет собой искомая величина, какие значения она может принимать.

После того как мы четко определили нашу цель, надо выяснить, какие данные у нас имеются, то есть ответить на вопрос:

<u>Что нам дано</u>?

Разобравшись с данными и разъяснив суть каждого используемого понятия, мы можем двигаться дальше.

Решение каждой задачи основывается на накопленном опыте и на тех знаниях о способах решения задач, которые были получены ранее, поэтому следующим вопросом, на который нужно найти ответ, будет вопрос:

<u>Не была ли нами уже решена ранее задача с подобными неизвестными и исходными данными</u>?

Ответ на данный вопрос поможет вспомнить все уже изученные ранее способы решения подобных задач и если для их решения раньше был уже придуман общий метод, то им можно воспользоваться опять.

Если задачи подобного типа еще не рассматривались и не удается найти ответ на предыдущий вопрос, то бывает полезно задать себе следующий вопрос:

<u>Какие данные нужны, для того чтобы найти неизвестное</u>?

Отвечая на этот вопрос, мы исходное неизвестное заменяем на новые неизвестные, для поиска которых возможным окажется применение уже известных методов.

На следующем этапе важно провести анализ данных, то есть ответить на вопрос:

Для чего могут понадобиться исходные данные?

Данный вопрос позволит понять, что может быть определено по известным данным. Проанализировав известное, нам будет легче установить взаимосвязи между известным и неизвестным.

Нестандартная задача может быть сформулирована таким образом, что разобраться в ее условии бывает достаточно непросто. Если условие громоздкое и запутанное, то полезно ответить на следующий вопрос:

Можно ли переформулировать исходную задачу?

Порой после переформулировки сложная, на первый взгляд, задача превращается в весьма простую.

Иногда сложную задачу можно разбить на несколько более простых, поэтому важно также ответить на вопрос:

Нельзя ли исходную задачу свести к решению нескольких более простых?

Приведенный список вопросов является лишь некоторой схемой, которая помогает только наметить план решения. Сам процесс решения может потребовать ответа на множество других вопросов. Но для того, чтобы начать решать задачу, полезным бывает составить первоначальный план действий, руководствуясь указанными вопросами. Возможно, первичный план поможет найти решение задачи на каком-то из его этапов. А возможно, предприняв все указанные попытки, мы так и не найдем решения задачи. Тогда нам надо будет задавать новые вопросы и искать новые пути решения. Но главное – начать действовать, так как именно в процессе действия рождаются новые идеи решения. А план нам поможет начать думать над задачей.

Итак, на основе рассмотренных вопросов мы можем составить следующий первоначальный план решения задачи.

Первоначальный план решения нестандартной задачи

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина и какие значения она может принимать.
2. Определить, что известно.
3. Попытаться найти аналогию между решенными ранее задачами и новой задачей, а затем использовать уже известный способ решения.
4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.
5. Провести анализ данных: определить, что может быть определено по известным данным.
6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав ее более понятной.
7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счете, приведет к решению исходной задачи.

Рассмотрим на примерах, как при решении задач могут быть использованы идеи данного плана.

Задача 1.

Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шел со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с.

Когда Миша и Маша выходили навстречу друг другу, их собака Тузик побежала от Миши к Маше. Добежав до Маши, она развернулась и побежала к Мише, и так она бегала, не останавливаясь, со скоростью 6 м/с от одного из них к другому, пока Миша не встретился с Машей. Сколько метров пробежала собака?

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Надо найти, сколько метров пробежала собака. Искомая величина – расстояние, положительная величина.

2. Определить, что известно.

Известно, что Миша и Маша вышли одновременно навстречу друг другу и прошли вместе расстояние 2500 м. Известны скорости их движения и скорость движения собаки. Известно, что собака бегала все время от начала движения детей и до их встречи.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решенными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Миша и Маша вышли одновременно и двигались навстречу друг другу. Их движение может быть описано известными формулами встречного одновременного движения. Так как собака двигалась с постоянной скоростью, то ее движение описывается также известной нам формулой движения $S = vt$, где S – путь, пройденный собакой, v – скорость движения собаки, а t – время ее движения.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Для того чтобы найти путь, который пробежала собака, нам достаточно определить время ее движения, так как ее скорость нам известна. Собака двигалась все время, пока Миша и Маша шли навстречу друг другу. Значит, время движения собаки равно времени движения детей. Найдя время движения детей, мы сможем найти время движения собаки, а значит, и путь, который она пробежала.

5. Провести анализ данных: определить, что может быть определено по известным данным.

Зная скорости движения детей и расстояние, которое они прошли при встречном одновременном движении, мы можем вычислить время их движения

$$t = \frac{2500}{1,6 + 0,9}.$$

6. Попытаться переформулировать исходную задачу, сделав ее более понятной.

Для того чтобы сделать задачу более простой, ее можно сформулировать, например, следующим образом:

«Из двух пунктов, расстояние между которыми 2500 м, одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Миша шел со скоростью 1,6 м/с, а Маша – 0,9 м/с. Все то время, что дети шли навстречу друг другу, их собака Тузик бегала со скоростью 6 м/с. Сколько метров пробежала собака?»

7. Попытаться разбить сложную задачу на несколько более простых, решение которых, в конечном счете, приведет к решению исходной задачи.

Решая нашу задачу, мы разбили ее на две более простые:
нахождение времени движения детей при встречном одновременном движении;
нахождение расстояния, пройденного собакой при движении с постоянной скоростью.
Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

1) $\dfrac{2500}{1{,}6+0{,}9}=1000$ (с) – время движения детей и собаки,

2) $6 \cdot 1000 = 6000$ (м) $= 6$ (км) – путь, который пробежала собака.

Ответ: собака пробежала 6 км.

Задача 2.
Решите уравнение: $\dfrac{10x}{x+3}+\dfrac{11x}{x+3}=7$.

Решение:

1. Определить, что требуется найти в задаче, и понять, что представляет собой искомая величина.

Нам надо найти все значения неизвестного x, при которых данное равенство превращается в истинное высказывание. Так как выражение $x + 3$ стоит в знаменателе дроби, то $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

2. Определить, что известно.

Нам известно, что x удовлетворяет указанному уравнению.

3. Попытаться найти аналогию между задачами, решенными ранее, и новой задачей и использовать уже известный способ решения задач такого типа.

Мы уже умеем решать линейные уравнения вида $kx = c$, где k и c – некоторые рациональные числа. Заметим, что если мы обозначим $y=\dfrac{x}{x+3}$, то сможем записать уравнение в виде $10y + 11y = 7 \Leftrightarrow 21y = 7$.

4. Выяснить, какие данные необходимы для нахождения неизвестного, тем самым заменить задачу поиска исходного неизвестного поиском новых неизвестных, которые возможно будет найти уже известными способами.

Найдя y из линейного уравнения $21y = 7$, мы затем сможем найти x из равенства $y=\dfrac{x}{x+3}$, используя основное свойство пропорции.

Таким образом, решение нашей задачи выглядит следующим образом:

$$21y=7 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+3}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = x + 3\ (x \neq -3) \Leftrightarrow 2x = 3\ (x \neq -3) \Leftrightarrow x = 1{,}5\ (1{,}5 \neq -3).$$

Ответ: $\{1{,}5\}$.

К **1** Сравните задачи. Наметьте план решения каждой из них. Что вы замечаете?

1) Из пунктов A и B одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени был в пути каждый из этих автомобилей?

2) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 360 км, одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Через сколько времени они встретились, если первый затратил на весь путь 4 часа, а второй 12 часов?

3) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 360 км, одновременно в полдень выехали навстречу друг другу два автомобиля. Автомобили ехали по одной и той же дороге с постоянными скоростями. Один из этих автомобилей приехал в пункт B в 16 часов, а другой приехал в A в полночь. Сколько времени после их встречи двигался каждый автомобиль до пункта назначения?

Как более простые задачи помогут в решении последней задачи? Сформулируйте идею, которая может пригодиться для решения сложных задач.

2 1) Проанализируйте уравнение:

$$\frac{2x-3}{x-6}=\frac{2x-1}{x-2}.$$

Алгоритм решения подобных уравнений вам еще неизвестен. Аналогия с каким из предложенных ниже уравнений поможет решить данное уравнение?

а) $\frac{5x-1}{x-2}=0$; б) $\frac{2x}{5}=\frac{x-1}{3}$; в) $x-2=5$; г) $2x-3=2x-1$.

2) Сформулируйте идею, которая может пригодиться при выполнении «новых» заданий.

3 Сопоставьте идеи, сформулированные вами при выполнении заданий № 1 и № 2 с алгоритмом на стр. 4. Какие из шагов алгоритма вам удалось сформулировать самостоятельно?

4 Проанализируйте задачу:

«Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они встретились через 2 часа после выезда, а через 1 час после встречи первый велосипедист приехал в конечный пункт. Сколько времени понадобилось на весь путь второму велосипедисту?»

Аналогия с какой из приведенных ниже задач поможет решить эту задачу?

А) Мастер и ученик, работая вместе, делают всю работу за 2 часа. Мастер, работая один, будет выполнять эту работу на час дольше. За сколько времени эту работу выполнит ученик, если производительность каждого из них не меняется?

Б) Из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 243 км, навстречу друг другу выехали мотоциклисты. Скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости второго. С какой скоростью двигался каждый из них, если известно, что через 1 ч 48 минут они встретились?

Решите задачу с помощью найденной аналогии.

5 Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\frac{2x-5}{x-2}=\frac{x-3}{x-2}$; б) $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-2}=1$; в) $x^5-x^3=0$; г) $x^3-6x^2-4x+24=0$.

6 Решите задачу И. Ньютона.

Купец ежегодно расходует 100 фунтов стерлингов на содержание семьи и приумножает остальной капитал на одну треть. Через три года он стал вдвое богаче. Как велик стал его капитал?

П **7** Решите задачу:

а) Один насос наполнил бассейн, а другой за это же время наполнил бассейн объемом на 600 м^3 больше. Определите объемы бассейнов, если один из насосов накачивает 70 м^3 в час, другой – 120 м^3.

б) Ученики седьмых и восьмых классов получили в библиотеке 286 учебников, причем восьмиклассники получили на 20% больше, чем семиклассники. Сколько учебников получили восьмиклассники?

8 Является ли данное предложение высказыванием? Если является, то сформулируйте его отрицание. Какое из этих высказываний истинно?

1) Существуют числа, не являющиеся рациональными.
2) В прямоугольном треугольнике гипотенуза короче катета.
3) Л. Н. Толстой родился в 1828 году.
4) Если бы можно было не ходить в школу!
5) Для любого натурального числа n верно, что число $n^3 - n$ делится на 6.
6) Для любого натурального числа n число $n^3 - n$ делится на 5.
7) И. Ньютон сформулировал три фундаментальных закона механики.
8) Я учусь в восьмом классе.
9) Если бы я родился на год позже, то я бы сейчас учился в седьмом классе.
10) Через пять лет я буду учиться в институте.
11) Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой.
12) Вопросительное предложение не является высказыванием.

9 Для двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$) и теорему, обратную к противоположной ($\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

1) A: квадрат натурального числа n делится на 7;
   B: натуральное число n делится на 7.
2) A: квадрат натурального числа n при делении на 3 дает остаток 1;
   B: натуральное число n при делении на 3 дает остаток 1.
3) A: квадрат натурального числа n при делении на 7 дает остаток 2;
   B: натуральное число n при делении на 7 дает остаток 4.
4) A: число $n!$ делится на 13;
   B: натуральное число n больше 11.

10 Вычислите устно:

а)	б)	в)	г)
$0{,}6 \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$-0{,}25 \cdot \frac{4}{7}$	$(0{,}6)^2$
$: (-0{,}08)$	$: (-1{,}2)$	$-2\frac{6}{7}$	$: 0{,}04$
$+\,3\frac{12}{17}$	$-(-7\frac{1}{5})$	$: 0{,}02$	$-\frac{3}{5}$
$\cdot\left(-3\frac{1}{11}\right)$	$-11{,}8$	$+155$	$-4{,}4$
?	?	?	?

11 Найдите значение выражения:

а) $3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}0005$;

б) $1{,}2 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}5$;

в) $-0{,}4 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{3}{7}\right)$;

г) $1\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{6}\right) \cdot (-0{,}6)$;

д) $\left(-3\frac{5}{6}\right)\cdot 0,4\cdot 1\frac{1}{23}$; е) $0,3\cdot\left(-7\frac{3}{5}\right)\cdot 1\frac{1}{19}$;

ж) $\frac{7}{9}+\frac{2}{9}\cdot 0,9$; з) $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 0,6$;

и) $4\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\cdot 3-9\frac{1}{6}$; к) $\frac{13}{15}-2\frac{1}{2}\cdot 4+2\cdot 2\frac{2}{5}$;

л) $2\frac{3}{4}+\left(3\frac{1}{5}-3\frac{7}{10}\right)\cdot 1\frac{1}{4}$; м) $\left(2,125\cdot 1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7,25$.

12 Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{x}{\left(7,42\cdot\frac{5}{9}-(-11,48):1\frac{4}{5}\right):0,35}=\frac{\left(-6\frac{7}{8}+1,375-5\frac{1}{2}\cdot 0,73\right):(-1,73)}{7\frac{1}{5}:2,4}.$$

13 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $1\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{2}{3}$; д) $3\frac{5}{6}$; ж) $4\frac{4}{5}$;

б) $1\frac{44}{45}$; г) $2\frac{61}{90}$; е) $-17\frac{28}{225}$; з) $-5\frac{15}{22}$.

14 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 3,(6); в) 94,32(1); д) −7,2(72);

б) 0,(13); г) −7,0(7); е) 17,01(32).

15 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является значение выражения:

а) $-5\cdot 7^{24}$; б) $(-5\cdot 7)^{18}$; в) $5\cdot(-7)^{7}$; г) $-(5\cdot 7)^{8}$.

16 Расположите числа в порядке возрастания и расшифруйте фамилию автора высказывания: «Счастье не в том, чтобы делать всегда, что хочешь, а в том, чтобы всегда хотеть того, что делаешь».

О $\left(\frac{1}{8}\right)^{100}$; **С** $3,5^{0}$; **Т** -7^{22}; **Л** $(-1)^{73}$; **Й** $(-8)^{30}$; **О** $(-2)^{19}$; **Т** $\left(\frac{1}{8}\right)^{101}$.

Как вы понимаете это высказывание, согласны ли вы с ним?

17 Во сколько раз изменится объем куба, если его ребро увеличить:
а) в два раза; б) в три раза; в) в четыре раза; г) в пять раз?

18 Найдите значение выражения:

а) $(-3)^{3}-(-1)^{6}+5^{2}+7$; б) $(0,125)^{6}\cdot 8^{8}$; в) $\frac{4^{3}\cdot 2^{5}}{8^{3}}$;

г) $(-1)^{9}-(-1)^{5}-(-1)^{4}$; д) $\frac{(0,1)^{3}\cdot(0,1)^{8}}{(0,1)^{9}}$; е) $\frac{18^{15}}{9^{14}\cdot 2^{16}}$;

ж) $2^5 \cdot (0,5)^3$; з) $\dfrac{(5^2)^3 \cdot 5^{10}}{(5^3)^5}$; и) $\dfrac{2^n \cdot 7^n}{14 \cdot 14^n}$;

к) $(0,25)^3 \cdot 4^3$; л) $\dfrac{7^9 \cdot 49^3}{7^{14}}$; м) $\dfrac{10^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 5^{n+2}}$.

19 Найдите значение выражения:

$$\frac{(36^2 : 6^3) \cdot 5^{15} \cdot 2^7 \cdot (2^9)^2 \cdot \left(\dfrac{35^{36}}{35^{30}}\right)}{14^5 \cdot (3^{20} : 3^{17}) \cdot 5^{20} \cdot 2^{23}} + (11,1)^0.$$

20 **Эстафета.** Выполнение заданий начинается с первого номера, верный ответ каждого задания показывает номер задания, которое надо выполнить следующим. Посоревнуйтесь со своим соседом по парте. В эстафете выигрывает тот, кто первым называет правильный ответ последнего задания.

1. Решить уравнение: $(x+1)^3 = 64$.
2. Вычислить: $\dfrac{(5^8)^3 \cdot 5^5}{(5^2)^{10} \cdot (5^4)^2}$.
3. Решить уравнение: $5^{2n} = 625$.
4. Вычислить: $\left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{12}{5}\right)^6$.
5. Вычислить: $-5^2 + (-5)^2 + 4$.

Д **21** Решите задачу:

«Для трех кроликов на 2 дня накосили 12 кг травы. Сколько травы нужно заготовить на 3 дня для 7 кроликов, если каждый кролик в день съедает одинаковое количество сена?».

Какой из шагов плана решения нестандартной задачи подал вам основную идею для ее решения?

22 Попробуйте решить уравнение, пользуясь планом решения нестандартных задач:

а) $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^2} = -4$; б) $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$.

23 Решите задачу:

а) Моторная лодка развивает скорость в стоячей воде 15 км/ч. Рыбак проплыл на ней против течения реки 30 ч, а затем вернулся на прежнее место за 20 ч. Какова скорость течения реки?

б) В цехе поставили автоматический станок, производительность которого выше производительности рабочего на 95 деталей в час. За 18 минут автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

в) Морской круизный лайнер должен был преодолеть расстояние между портами за 10 ч. Спустя 8 часов после отправления он увеличил скорость на 5 км/ч, поэтому в порт пришел раньше на 15 минут. С какой скоростью должен был плыть лайнер?

24 Из двух данных предложений A и B сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Для какой-нибудь из них проведите доказательство методом от противного.

1) A: квадрат натурального числа n делится на 5;
B: натуральное число n делится на 5.

2) A: квадрат натурального числа n при делении на 5 дает остаток 1;
B: натуральное число n при делении на 5 дает остаток 1.

3) A: натуральное число n больше 10;
B: число $n!$ делится на 3.

4) A: числа m и n целые;
B: сумма чисел m и n — целое число.

25 Найдите значение выражения:

а) $\left(3{,}6-3\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}6$; в) $(3{,}4\cdot 2{,}8-7{,}15):0{,}01$;

б) $12\frac{1}{3}-3\frac{1}{3}\cdot\left(3{,}2-\frac{1}{5}\right)$; г) $7\frac{3}{4}\cdot\left(-2\frac{2}{31}\right)-\left(-5\frac{1}{6}\right):2\frac{7}{12}$.

26 Найдите неизвестный член пропорции:

$$\frac{12\frac{4}{5}\cdot 3{,}75-6\frac{2}{5}\cdot 3{,}125}{x}=\frac{3\frac{3}{5}:\frac{3}{45}}{7{,}2+0{,}8\left(5{,}5-3\frac{1}{4}\right)}.$$

27 Запишите периодические десятичные дроби в виде обыкновенной:

а) $-10{,}(27)$; б) $1{,}0(27)$.

28 Вычислите:

а) $(-5+3)^3$; б) $(-5)^3+3^3$; в) $0{,}25^6\cdot 4^8$; г) $\frac{2^6\cdot\left(2^3\right)^3}{2^{15}}$.

29 Найдите значение выражения:

а) $\left(-0{,}2^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(8-(-4)^3\right)\right):(-0{,}1)^2$; б) $\frac{55^4\cdot\left(3^3\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 11}{\left(11^5\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot(6:11)^5\cdot 10^4}$.

C **30*** Прочитайте предложения:

A: Натуральное число n не делится на 7;
B: В представлении рационального числа $\frac{n}{7}$, где n – натуральное число, десятичной дробью имеется период из шести цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Из этих предложений сформулируйте прямую теорему ($A \Rightarrow B$), обратную теорему ($B \Rightarrow A$), противоположную теорему ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$) и теорему, обратную к противоположной ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$). Какие из этих теорем справедливы? Проведите доказательство методом от противного.

2. Необходимость и достаточность

Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит.

Михаил Ломоносов (1711–1765)
русский ученый-естествоиспытатель,
основатель Московского университета

Понятиями важными не только для грамотного проведения математических рассуждений, но и для построения любых рассуждений являются понятия «*необходимости*» и «*достаточности*».

В повседневной жизни мы часто используем слова «необходимо» и «достаточно». Например, «мне необходимо сделать домашнее задание» или «мне этого достаточно». При этом эти слова иногда употребляются в разных смыслах. Так, когда вы говорите, что для того чтобы дойти из дома до школы, вам необходимо 20 минут, то, скорее всего, вы имеете в виду, что за это время вы успеете дойти до школы. На самом деле вы хотите сказать, что на путь из дома до школы вам достаточно 20 минут. А когда вы говорите, что для того чтобы поехать во Францию вам нужна виза, вы имеете в виду, что без визы вас во Францию не пустят и здесь слово «необходимо» употребляется уже в другом смысле.

Так как математика не допускает нескольких различных толкований одного и того же понятия, нам важно разобраться с математическим смыслом этих слов.

Для этого рассмотрим следующее высказывание:

«Если Миша умеет читать по-английски, то он знает буквы английского алфавита». Это высказывание можно записать в виде $A \Rightarrow B$, где

- предложение A: «Миша умеет читать по-английски»,
- предложение B: «Миша знает буквы английского алфавита».

Данное высказывание можно переформулировать следующим образом: «Из того, что Миша умеет читать по-английски, следует, что он знает буквы английского алфавита». Это высказывание истинное.

А вот обратное высказывание: «Из того, что Миша знает буквы английского алфавита, следует, что он умеет читать по-английски» ложно.

Какое же условие является здесь необходимым, а какое достаточным?

Определение. Если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно, то A называется **достаточным условием** для B, а B – **необходимым условием** для A.

Итак,

$A \Rightarrow B$ – истинное
A **достаточное условие** для B
B **необходимое условие** для A

В нашем случае истинно высказывание: «Из того, что Миша умеет читать, следует, что он знает буквы». Значит, *знание букв* – необходимо для *умения читать*, а *умение читать* – достаточно для *знания букв*.

Другими словами:

- для того чтобы Миша умел читать по-английски, необходимо, чтобы он знал буквы английского алфавита;
- для того чтобы Миша знал буквы английского алфавита, достаточно, чтобы он умел читать по-английски.

* * *

Чтобы определить, необходимым или достаточным является то или другое условие, мы можем использовать также диаграммы Эйлера–Венна. В качестве примера рассмотрим следующее высказывание: «Если натуральное число делится на 4, то оно делится на 2». Обозначим:

предложение A: «Натуральное число x делится на 4»,

предложение B: «Натуральное число x делится на 2».

Натуральное число, которое делится на 4, можно записать в виде произведения $4n = 2 \cdot 2n$, откуда ясно, что оно делится на 2. Значит, из предложения A следует предложение B ($A \Rightarrow B$), то есть условие B является необходимым условием для A, а A – достаточным условием для B.

Обозначим I_A множество всех x, при которых предложение A становится истинным высказыванием. Это *множество истинности* предложения A – множество натуральных чисел, кратных 4.

Обозначим I_B множество всех x, для которых предложение B становится истинным высказыванием. Это *множество истинности* предложения B – множество натуральных чисел, кратных 2.

Изобразим множества I_A и I_B на диаграмме Эйлера–Венна. Множество I_A является подмножеством множества I_B, так как есть числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 4, например, 6. При этом все числа, делящиеся на 4, делятся на 2 (рис. 1).

Рис. 1

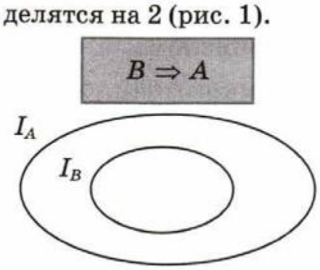


Рис. 2

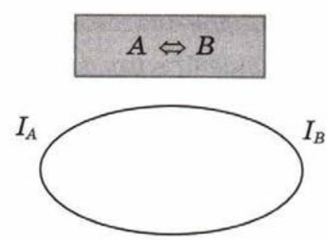


Рис. 3

На рисунке 2, наоборот, множество I_B является подмножеством множества I_A ($I_B \subset I_A$), тогда A будет необходимым условием для B, а B – достаточным для A: $B \Rightarrow A$.

В каких же случаях условие A будет необходимым и достаточным для B?

Согласно нашему определению, для этого нужно, чтобы были истинными оба следствия: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. При этом, если A является необходимым и достаточным условием для B, то и B является необходимым и достаточным условием для A, а множества их истинности совпадают (рис. 3).

Как мы уже знаем, в этом случае говорят, что такие предложения *равносильны*, то есть $A \Leftrightarrow B$[1]. Другими словами, можно сказать, что для того чтобы выполнялось A, *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялось B.

Таким образом,

A является достаточным условием для B, если $I_A \subset I_B$;
A является необходимым условием для B, если $I_B \subset I_A$;
A является необходимым и достаточным условием для B, если $I_A = I_B$.

[1] *Равносильные* предложения называются также *эквивалентными*; применяется обозначение $A \sim B$.

Рассмотрим еще несколько примеров для того, чтобы разобраться, какие условия являются необходимыми, какие достаточными, а какие необходимыми и достаточными.

Пример 1.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того что бы сумма двух целых чисел была четным числом, ..., чтобы каждое слагаемое было четным числом».

Решение:

Исходное высказывание состоит из двух предложений A и B, где:

A: «Сумма двух целых чисел четное число»,

B: «Каждое слагаемое четное число».

Определим истинность высказываний $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

$\underline{A \Rightarrow B}$: Высказывание ложно, так как из того, что сумма двух целых чисел число четное, не следует, что каждое слагаемое число четное. Например, сумма двух нечетных чисел также число четное.

$\underline{B \Rightarrow A}$: Высказывание истинно, так как по свойству делимости, если слагаемые четные, то и их сумма число четное.

Согласно определению необходимости и достаточности условий: A – является необходимым условием для B, а B – достаточным для A. Поэтому верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы сумма двух целых чисел была четным числом, ***достаточно***, чтобы каждое слагаемое было четным числом».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить слово «достаточно».

* * *

Пример 2.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы число делилось на 9, ..., чтобы оно делилось на 3».

Решение:

Исходное высказывание состоит из двух предложений C и D, где:

C: Число делится на 9;

D: Число делится на 3.

Нарисуем диаграмму Эйлера–Венна для множеств истинности I_C предложения C (множество всех чисел, кратных 9) и I_D предложения D (множество всех чисел, кратных 3).

Множество всех чисел, кратных 9, является подмножеством множества всех чисел, кратных 3: $I_C \subset I_D$. Значит, D – необходимое условие для C. Поэтому верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы число делилось на 9, ***необходимо***, чтобы оно делилось на 3».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить слово «необходимо».

Пример 3.

Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

«Для того чтобы было истинно равенство $x + 3 = 5$, ..., чтобы x равнялось 2».

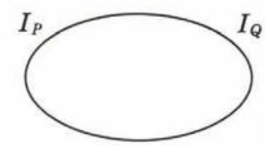
Решение:

Исходное предложение состоит из двух предложений P и Q, где:

P: «Сумма $x + 3$ равна 5»,

Q: «x равен 2».

Нарисуем диаграмму Эйлера–Венна для множеств истинности I_P предложения P (множество решений уравнения $x + 3 = 5$) и I_Q предложения Q (множество решений уравнения $x = 2$).



Уравнение $x + 3 = 5$ имеет единственный корень $x = 2$. Поэтому множества истинности высказываний P и Q совпадают. Значит, верным будет являться следующее высказывание:

«Для того чтобы было истинно равенство $x + 3 = 5$, <u>*необходимо и достаточно*</u>, чтобы x равнялось 2».

Ответ: в предложение вместо многоточия надо поставить словосочетание «необходимо и достаточно».

К **31** Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

а) A: Натуральное число n при делении на 3 дает остаток 1.
B: Квадрат натурального числа n при делении на 3 дает остаток 1.

б) Пусть n – натуральное число.
A: n – четное число;
B: $n^3 - n$ делится на 6.

в) A: Сумма цифр натурального числа n делится на 3.
B: Натуральное число n четно.

г) A: Натуральное число a четно.
B: Натуральное число a является квадратом четного числа.

д) A: Натуральное число n больше, чем 5.
B: Для натурального числа n произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ больше, чем 1000.

32 1) Является ли верным высказывание: «Если на улице листопад, то сейчас осень»?

2) Переформулируйте это высказывание:
а) с помощью слова «необходимо»,
б) с помощью слова «достаточно».
Можете ли вы обосновать свои варианты?

3) Найдите в тексте учебника определение, с помощью которого можно выполнить данное задание. Оказались ли верными предложенные вами варианты?

33 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы целое число a являлось квадратом четного числа, ..., чтобы целое число a делилось на 4.

б) Для того чтобы целые числа a и b были равны, ..., чтобы квадраты целых чисел a и b были равны.

в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 3, ..., чтобы натуральное число n делилось на 21.

г) Для того чтобы разность двух целых чисел a и b делилась на 5, ..., чтобы каждое из чисел a и b делилось на 5.

П **34** Возведите в степень:

а) $(t-1)^2$; б) $(y^2+5x^2)^2$; в) $(t+1)^3$; г) $(y^2-5x^2)^3$.

35 Используя формулы сокращенного умножения, вычислите:

а) $91\cdot 89$; г) 61^2; ж) $\left(2\frac{13}{15}\right)^3+3\cdot\left(2\frac{13}{15}\right)^2\cdot\frac{2}{15}+3\cdot 2\frac{13}{15}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^2+\left(\frac{2}{15}\right)^3$;

б) $48\cdot 52$; д) 39^2; з) 21^3; к) $(4-0{,}1)(4^2+4\cdot 0{,}1+0{,}1^2)$;

в) $73\cdot 67$; е) $\left(29\frac{29}{30}\right)^2$; и) 19^3; л) 11^3-1.

36 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $5k(k+3)(3-k)$;

б) $(a+4)(-a-4)\cdot\frac{1}{16}a$;

в) $(m+2)(-m-2)^2$;

г) $4\cdot\left(\frac{1}{2}n-h\right)\left(\frac{1}{2}n+h\right)\cdot\left(\frac{1}{4}n^2-h^2\right)$;

д) $3d\cdot\left(\frac{2}{3}d-3\right)\left(\frac{4}{9}d^2+2d+9\right)$;

е) $1000000\cdot(0{,}1-q)(0{,}1+q)(q^4+0{,}01q^2+0{,}0001)$.

37 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{100d^6-t^2}{t-10d^3}$;

б) $\dfrac{625x^4-y^4}{(y^2-25x^2)^2}$;

в) $\dfrac{9a^2+16b^2-24ab}{4b-3a}$;

г) $\dfrac{\frac{1}{16}n^{10}+25m^4+2{,}5m^2n^5}{25m^4-\frac{1}{16}n^{10}}$;

д) $\dfrac{8k^3-125l^3}{25l^2+10kl+4k^2}$;

е) $\dfrac{0{,}064q^3+0{,}216r^6}{0{,}16q^2-0{,}36r^4}$

ж) $\dfrac{7c-z}{343c^3-147c^2z+21cz^2-z^3}$;

з) $\dfrac{81s^2+36sv+4v^2}{729s^3+486s^2v+108sv^2+8v^3}$.

38 Разложите на множители многочлен:

а) $15a-15b+a^2-ab$;

б) $a^2(c+1)+4a(c+1)+4c+4$;

в) $5s^2c+c^3+5sc^2+s^3$;

г) $48x^4m^5-72x^2y^3m^5+27y^6m^5$;

д) $m^3n^6+6m^2n^4p^3+12mn^2p^6+8p^9$;

е) $144a^2b^4-289p^6q^8$;

ж) $64x^3+0{,}001y^{15}$;

з) $512m^6-8n^9$.

39 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $a^2-10a+9$; б) $b^2-12b+11$; в) $c^2+\frac{1}{2}c-3$.

Д **40** Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы сумма цифр натурального числа n делилась на 3, …, чтобы число n делилось на 9.

б) Для того чтобы целые числа a и b были нечетными, ..., чтобы сумма целых чисел a и b являлась четной.

в) Для того чтобы одно из натуральных чисел a и b равнялось 1, ..., чтобы их наибольший общий делитель равнялся 1.

г) Для того чтобы натуральное число n делилось на 2 и на 3, ..., чтобы это число делилось на 6.

41 Используя формулы сокращенного умножения, вычислите:

а) $32\cdot 28$; б) 99^2; в) 101^3; г) $(11^2-0{,}5\cdot 11+0{,}5^2)\cdot(11+0{,}5)$.

42 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

а) $a^2(a+0{,}2)(0{,}2-a)$; в) $(d^3+2p^2)^2$; д) $(a-2b)^3$;

б) $(b^3+3c^2)(b^3-3c^2)$; г) $\left(-q^4+\frac{3}{4}r^2\right)^2$; е) $\left(5s^3+\frac{1}{5}z^2\right)^3$.

43 Упростите:

а) $(v^2+6k^3)\cdot(v^4-6v^2k^3+36k^6)-v^3-216k^9$;

б) $m^3-\frac{1}{5}m-\left(m-\frac{1}{5}n\right)\cdot\left(m^2+\frac{1}{5}mn+\frac{1}{25}n^2\right)$;

в) $(x^2-0{,}3y)\cdot(0{,}3y-x^2)^2+0{,}027y^3$.

44 Разложите на множители многочлен:

а) $3d^3-27d$; г) $m^3+10m^2p^2+25mp^4$;

б) $z^3-z^2-36z+36$; д) $343a^3q^6-125n^9l^3$;

в) $v^2-h^2+8v-8h$; е) $b^{12}-b^8k+\frac{1}{3}b^4k^2-\frac{1}{27}k^3$.

45 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $k^2+6k-40$; б) $25b^2-10bt-8t^2$.

46 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\dfrac{x^{26}y^{30}+x^{15}y^{48}}{x^{25}y^{28}+x^{14}y^{46}}$; б) $\dfrac{8q^3+0{,}001m^9}{4q^2-0{,}01m^6}$;

в) $\dfrac{25x^{16}-25y^{10}}{\left(y^5-x^8\right)^2}$;   г) $\dfrac{\frac{1}{9}c+9x}{\frac{1}{729}c^3+\frac{1}{3}c^2x+27cx^2+729x^3}$.

C **47*** Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какие из них верные, а какие – ложные? Ответ обоснуйте.

а) A: Квадрат целого числа n отрицателен.
B: Целое число n делится на 3.

б) A: Квадрат целого числа n отрицателен.
B: Квадрат целого числа n – простое число.

в) A: Натуральное число n больше, чем 3.
B: Для натурального числа n числа n, $n+2$, $n+4$ – простые.

г) A: Целые числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=z^2$.
B: Целое число y равно 1.

д) A: Уравнение $ax=b$, где a и b – целые числа, имеет не менее двух целочисленных решений.
B: Целое число a равно 0.

е) A: Натуральное число n больше, чем 1.
B: Для натурального числа n число $n!$ нечетно.

3. Свойства и признаки. Критерии

Именно математика дает надежнейшие правила: кто им следует – тому не опасен обман чувств.

Леонард Эйлер (1707–1783),
выдающийся швейцарский математик

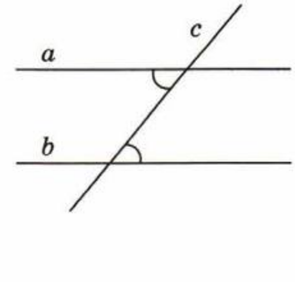
В предыдущем пункте мы учились проводить математические рассуждения, знакомясь с различными формулировками логического следования. Подобные логические формы крайне важны, потому что помогают развиваться математике, как науке, а нам помогают продвигаться в изучении этой науки.

В этом пункте мы продолжим разбираться с формой $A \Rightarrow B$. Эта работа поможет вам логически грамотно рассуждать, лучше понимать друг друга, а значит, быстрее и надежнее получать намеченный результат.

Рассмотрим два предложения:

A: Прямые a и b параллельны, прямая c не параллельна прямым a и b.

B: Внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c, равны.



Из курса геометрии мы знаем, что из предложения A следует предложение B, и эта теорема называется ***свойством*** параллельных прямых. Вспомним, как формулируется это свойство.

$$A \Rightarrow B$$

«Если прямые a и b параллельны, то внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c, равны».

Чтобы получить обратную теорему, поменяем условие и заключение местами: то есть из предложения B следует предложение A. Из курса геометрии мы знаем, что эта теорема тоже верна.

$$B \Rightarrow A$$

«Если внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении прямых a и b прямой c, равны, то прямые a и b параллельны».

Эта теорема называется ***признаком*** параллельности прямых.

Различие в названиях этих теорем объясняется тем, что *свойство* – это верное высказывание (или утверждение) об объектах, принадлежащих некоторому множеству. А *признак* позволяет установить принадлежность объектов к этому множеству. В геометрии свойства и признаки формулируются для различных фигур, в алгебре – для чисел, а в жизни – для решения практических, жизненно важных проблем.

В нашем случае свойство параллельных прямых утверждает, что для любых двух элементов (обозначим их m_1 и m_2), принадлежащих множеству параллельных прямых (обозначим его M), справедливо утверждение B.

Таким образом,

Свойством элемента $m \in M$ называют высказывание вида «Для каждого элемента m из множества M выполняется утверждение B»:

$$m \in M \Rightarrow B$$

Для чего нужны свойства? Установив, что некоторый элемент принадлежит определенному множеству, мы можем утверждать, что для него будет выполняться свойство, присущее *всем* элементам этого множества. Так, установив, что прямые параллельны, можно не мерить каждый раз внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении этих прямых третьей, а смело утверждать, что эти углы равны.

Признак параллельности прямых утверждает, что два элемента m_1 и m_2, для которых справедливо утверждение B, будут принадлежать множеству параллельных прямых M.

Признаком принадлежности элемента m множеству M называют высказывание вида «Каждый элемент m, для которого выполняется утверждение B, принадлежит множеству M»:

$$B \Rightarrow m \in M$$

В отличие от свойств, признаки нужны для того чтобы устанавливать принадлежность объекта множеству. Это позволяет трудные или даже невыполнимые задачи сводить к легким. Так, в нашем примере, невозможно провести непосредственную проверку параллельности двух прямых – мы не можем продолжить их до бесконечности, чтобы установить, пересекаются они или нет. В признаке параллельности прямых эта неосуществимая на практике работа заменяется проверкой равенства двух определенных углов.

В алгебре признаки используются с той же самой целью. Например, чтобы выяснить, является ли число 123456789101112...99100 четным, нужно разделить его на 2 и установить, что остаток от деления равен нулю. Пользуясь признаком делимости на 2, мы заменяем этот трудоемкий процесс простой проверкой четности его последней цифры. Таким образом, признаки позволяют установить принадлежность объектов определенному множеству путем всего лишь проверки некоторого условия.

Из определений свойства и признака ясно, что на математическом языке их можно записать в виде следования.

Свойство элементов множества M	$m \in M \Rightarrow B(m)$ – истинно
Признак принадлежности элементов множеству M	$B(m)$ – истинно $\Rightarrow m \in M$

Эта форма позволяет лучше разобраться в смысле утверждений, а, значит, облегчает их доказательство и применение. Однако предложения в форме следования нередко бывают неудобными для практического использования. В этом случае их заменяют более простыми красивыми формулировками.

Например, свойство равнобедренного треугольника, представленное в форме следования, позволяет легко понять, где условие теоремы (то есть, что дано), а где – заключение (что требуется доказать):

«Если треугольник принадлежит множеству треугольников с равными боковыми сторонами[2], то углы при его основании равны»

Однако это предложение звучит несколько громоздко. Поэтому обычно свойство равнобедренного треугольника формулируется кратко:

«В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Очевидно, что при работе с теоремами важно уметь переходить не только от развернутой формы к краткой, но и от краткой формы к развернутой «Если..., то...», а затем – и к математической записи теорем, используя введение обозначений. В следующей таблице представлены несколько примеров такого перехода.

Краткая форма	Развернутая форма	Математический язык
Вертикальные углы равны.	Если два угла принадлежат множеству пар вертикальных углов, то эти два угла равны.	$\angle A$ и $\angle B$ – вертикальные $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle A = \angle B$
Натуральное число, оканчивающееся на 0 или на 5, делится на 5.	Если натуральное число оканчивается на 5 или на 0, то оно принадлежит множеству чисел, которые делятся на 5.	n оканчивается на 0 или 5 $(n \in N) \Rightarrow n \,\vdots\, 5$
Железные предметы притягиваются магнитом.	Если предмет принадлежит множеству железных предметов, то он притягивается магнитом.	$p \in M \Rightarrow p$ – притягивается магнитом (M – множество железных предметов)

[2] Здесь и далее под равенством отрезков понимается равенство их длин.

Развернутая форма записи позволяет легко установить, что в первом и третьем примерах приведены *свойства* (соответственно, вертикальных углов и железных предметов), а во второй строке – *признак* (делимости на 5). Математический язык облегчает не только понимание смысла теорем, но и построение теорем, обратных данным.

Теорема, обратная свойству вертикальных углов (первая строка таблицы), неверна, так как для утверждения «Равные углы вертикальны» легко подобрать контрпример. Точно так же неверна обратная теорема и для свойства железных предметов: например, магнитом притягиваются никель и кобальт (третья строка).

А вот теорема, обратная признаку делимости на 5 (то есть свойство делимости на 5), как мы знаем, верна: «Число, делящееся на 5, оканчивается на 0 или 5». На математическом языке это свойство можно записать так:

$n \vdots 5 \Rightarrow n$ оканчивается на 0 или 5 ($n \in N$)

Значит, имеет место равносильность условий:

$n \vdots 5 \Leftrightarrow n$ оканчивается на 0 или 5 ($n \in N$)

Таким образом, условие «натуральное число оканчивается на 0 или на 5» является своеобразной меркой, инструментом, средством, помогающим выявить *все без исключения* элементы, принадлежащие множеству чисел, кратных 5, *и только их*! Поэтому такие утверждения в математике называют *критериями* (от др.греч. κριτηριον – способность различения, средство суждения, мерило).

Критериями пользуются и в жизни. Так, например, знакомые вам критерии выставления отметок за проверочную работу однозначно определяют условия начисления того или иного балла.

Мы уже знаем, что знак $\Leftrightarrow$ переводится на русский язык с помощью оборотов «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «если и только если», «необходимо и достаточно». Поэтому признак (а точнее сказать, критерий) делимости числа на 5 мы формулировали так: «Натуральное число делится на 5 *тогда и только тогда*, когда оно оканчивается на 5 или 0» (но его можно формулировать и с любыми другими перечисленными выше оборотами).

Критерием принадлежности элемента m к множеству M называют высказывание вида «Элемент m принадлежит множеству M в том и только в том случае, когда для m выполняется условие B».

$$m \in M \Leftrightarrow B$$

Ясно, что в любом свойстве условие B является *необходимым* условием для того, чтобы m принадлежал множеству M, в признаке – *достаточным*, а в критерии – *необходимым и достаточным*:

Свойство	Признак	Критерий
$m \in M \Rightarrow B$	$B \Rightarrow m \in M$	$m \in M \Leftrightarrow B$

Следовательно, не любое свойство или признак являются критериями. Так, приведенные выше свойства вертикальных углов и железных предметов, как уже было показано, критериями не являются. А вот равенство двух внутренних накрест лежащих углов, напротив, является критерием параллельности прямых, который можно сформулировать, например, так: «Чтобы две прямые a и b были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы внутренние накрест лежащие углы, образуемые при пересечении этих прямых третьей прямой c, были равны».

Пример 1.

Даны высказывания:

A: Сумма двух целых чисел a и b четна.

B: Разность двух целых чисел a и b четна.

Докажите верность критерия $A \Leftrightarrow B$.

Доказательство:

1) Сформулируем критерий: «Чтобы сумма двух целых чисел a и b была четна, необходимо и достаточно, чтобы разность этих чисел была четна».

Чтобы доказать верность критерия, нужно убедиться в равносильности высказываний A и B, то есть доказать, что верны обе теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

2) Сформулируем теорему $A \Rightarrow B$: «Если сумма двух целых чисел a и b четна, то и разность чисел a и b будет четной».

Докажем эту теорему.

Разность $a - b$ можем представить в виде: $a - b - b + b = (a + b) - 2b$.

Сумма $a + b$ четна (по условию), тогда разность $(a + b) - 2b$ будет четной как разность двух четных чисел $a + b$ и $2b$. Теорема доказана.

3) Сформулируем теорему $B \Rightarrow A$: «Если разность двух целых чисел a и b четна, то и сумма чисел a и b будет четной».

Докажем эту теорему.

Сумму $a + b$ можем представить в виде: $a + b - b + b = (a - b) + 2b$.

Разность $a - b$ четна (по условию), тогда сумма $(a - b) + 2b$ будет четной как сумма двух четных чисел $a - b$ и $2b$. Теорема доказана.

К **48** Сформулируйте утверждения, обратные данным.

а) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a + b) \vdots c$.

б) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $ab \vdots c$.

в) Если прямая линия является графиком прямой пропорциональности, то она проходит через начало координат.

г) Если два числа противоположны, то их квадраты равны.

д) Если число делится на 24, то оно делится на 6 и на 4.

Являются ли они верными?

49 Сравните утверждения:

A: Если число делится на 15, то оно делится на 3 и на 5.

B: Если число делится на 3 и на 5, то оно делится на 15.

Какое из этих утверждений можно назвать свойством делимости на 15, а какое признаком делимости на 15?

Объедините оба утверждения в одно. Как можно назвать полученное утверждение? Сопоставьте свои предположения с определениями на стр. 19–21.

50 Докажите, что предложения A и B равносильны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

а) A: Целые числа a и b дают одинаковые остатки при делении на натуральное число m.
B: Разность двух целых чисел a и b делится на натуральное число m.

б) A: Натуральные числа a и b взаимно просты.
B: Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b равно произведению ab.

в) A: Сумма цифр натурального числа n делится на 3.
B: Натуральное число n делится на 3.

г) A: Натуральное число n делится на 11.
B: Сумма цифр натурального числа n, стоящих на четных местах (считая от первой), отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, делящееся на 11.

51 Решите уравнение:

а) $0,9(v+1)=0,2(v-6)$;

б) $6(x-1)+12(3-2x)=45-17x$;

в) $1=20y+15(3-y)-5(y+11)$;

г) $12(1-z)-4=2(4z-3)-9z+14$;

д) $\dfrac{5a+3}{6}=\dfrac{8a-5}{11}$;

е) $\dfrac{m-4}{3}+\dfrac{m-8}{9}=1-\dfrac{m+1}{6}$;

ж) $(2z-3)(2z+3)-4z(z-5)=1$;

з) $(t-5)^2+(11+t)(11-t)=3+t$.

52 Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен:

а) $d^3-15d^2-4d+60=0$;

б) $x^3-8x^2-16x+128=0$;

в) $k^2+11k+18=0$;

г) $b^2-8b+15=0$.

53 Решите уравнение, содержащее модуль:

а) $|x+7|=15$;

б) $|2y+5|=-3$;

в) $-|1,5z+3|=-9$;

г) $|16-3k|=-|2k+1|$;

д) $\left|\dfrac{1}{4}m-6\right|=0$;

е) $|5t-4|=|8-t|$;

ж) $-|2x-4|=-|5-x|$;

з) $|3x+12|=|8x+3-10x-7|$.

54 На числовой прямой Ox изобразите следующие числовые промежутки, назовите их и запишите их обозначения:

а) $x\geqslant -8$;

б) $x<3,8$;

в) $-5<x<-1$;

г) $0\leqslant x\leqslant 9,1$;

д) $-7<x\leqslant 2$;

е) $\dfrac{1}{6}\leqslant x<\dfrac{1}{2}$.

55 Запишите множество целочисленных решений неравенства:

а) $-8<x<1$; б) $-8\leqslant x\leqslant -1$ в) $0<x\leqslant 8,7$; г) $0\leqslant x<8,7$.

56 Решите неравенство:

а) $0,4x\geqslant -0,12$;

б) $-\dfrac{2}{3}y\leqslant -\dfrac{5}{12}$;

в) $-10m+3,2<-4,8$;

г) $7a\geqslant 19a+6$;

д) $2(3c+2)-4\leqslant -5c-6(2c-0,5)$;

е) $4x+6(x-1)<6x+4(2x-3)-8(0,5x+1)$;

ж) $\dfrac{2}{5}y-(0,8y-7)\geqslant 2(1,2y-1)-(2,8y+8)$;

з) $-3a-0,3(a-5)+2\geqslant 4,8(a+5)+6,5$;

и) $\dfrac{z}{8}-0,3>0,5$;

к) $-\dfrac{3s}{4}+3<-\dfrac{s}{6}+\dfrac{2}{3}$.

Д **57** Докажите, что высказывания A и B равносильны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

а) A: Две последние цифры натурального числа n образуют двузначное число, делящееся на 25.

B: Натуральное число n делится на 25.

б) A: Натуральное число n четно.

B: Квадрат натурального числа n делится на 4.

58 Решите уравнение:

а) $3\left(3\frac{5}{6}q-\frac{2}{3}\right)+7-2{,}5q=6\left(\frac{3}{4}-q\right)$;

б) $17-(2z+5)-5z=19-7\left(2\frac{2}{7}-z\right)$;

в) $63d+4(0{,}125-15d)=0{,}5(1+6d)$;

г) $\frac{r-7{,}6}{4}=\frac{4{,}5+r}{5}$;

д) $(k-1)^2+(5-2k)^2-5(3+k)(k-3)=-26$;

е) $|6t-2{,}4|=1{,}2$;

ж) $|5x-1{,}2|=-\frac{1}{4}$;

з) $|0{,}8-4x|=0$;

и) $|2c-6|=|4-3c+2-c|$;

к) $-|3x+6|=-|-7+4x+2|$.

59 Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен:

а) $a^3+7a^2-9a-63=0$;

б) $x^3-5x^2-x+5=0$;

в) $h^2-8h+12=0$;

г) $c^2+9c+18=0$.

60 Решите неравенство:

а) $14x-7\leqslant 0$;

б) $-5y+0{,}25>0$;

в) $-2{,}4b+3>10{,}2$;

г) $-3<6(h-9)+27$;

д) $3t-(0{,}8-0{,}6t)+1{,}5(7t-8)\leqslant 1{,}2-0{,}9t$;

е) $1{,}3q+3\left(\frac{2}{3}-0{,}6q\right)>22+5(0{,}02q-1)$;

ж) $5-\frac{0{,}75d+1}{6}<-\frac{d}{8}+1$;

з) $-\frac{a}{5}-3<\frac{a}{7}+6$;

и) $\frac{5-2b}{4}>3b-\frac{9-b}{6}$;

к) $\frac{3x+7}{3}-12\geqslant\frac{2x+5}{2}-7$.

С **61*** Докажите, что высказывания A и B эквивалентны. Сформулируйте критерий $A \Leftrightarrow B$.

A: Уравнение $ax+by=c$, где a, b, c – целые числа, причем $a\neq 0$, $b\neq 0$, имеет целочисленные решения x, y.

B: Целое число c делится на наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$, где a, b – целые числа, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

§ 2. Сложные предложения

1. Сложные высказывания

Логика – это нравственность мысли и речи.

Ян Лукасевич (1878–1956), польский логик, член Польской Академии Наук

Умение правильно рассуждать необходимо любому из нас. Мы уже обсуждали, насколько это важно в математике, и какие абсурдные выводы могут получаться в случае нарушения логики рассуждений. В этом пункте мы познакомимся с правилами логики, которые нужны каждому для обоснования своей позиции и понимания позиции другого в любой совместной деятельности.

Текст, как математический, так и литературный, обычно состоит из сложных предложений, то есть таких предложений, которые можно разложить на отдельные части. При этом каждая такая часть будет самостоятельным предложением. Например, предложение «Вчера шел дождь, а сегодня светит солнце» состоит из двух отдельных частей: «Вчера шел дождь» и «Сегодня светит солнце». Естественно, сложное предложение может состоять и из большего количества частей.

Сложные высказывания получаются из простых высказываний. Мы уже знакомы с некоторыми правилами их построения. Так, мы учились строить отрицание с помощью фразы «Не верно, что...», строить логическое следование, соединяя простые предложения связкой: «Если..., то...». Но можно получить сложное предложение, пользуясь и другими связками, например, союзами «*и*», «*или*». Использование этих связок в математике несколько отличается от смысла этих оборотов в повседневной жизни. Поэтому нам важно разобраться с правилами, определяющими смысл каждого союза.

Рассмотрим два простых предложения:

«В 8 классе учится Антон»,

«В 8 классе учится Вова».

* * *

Примечание. Для какого-то отдельно взятого 8 класса эти предложения являются высказываниями, так как в этом случае можно однозначно определить, истинны они или ложны. В общем же случае мы имеем дело с предложениями с переменной «8 класс», поскольку в зависимости от того, какой 8 класс выбран, каждое из этих предложений может становиться либо истинным, либо ложным. Мы будем работать с ними как с высказываниями, считая, что речь идет о конкретно выбранном 8 классе.

Из этих высказываний мы можем получить сложное высказывание:

«В 8 классе учатся Антон **и** Вова».

Это сложное высказывание истинно в том и только в том случае, если в 8 классе учатся два мальчика с указанными именами, то есть если истинны оба исходных простых высказывания. Во всех остальных случаях оно – ложно.

Зафиксируем этот факт в таблице:

A: В 8 классе учится Антон	*B*: В 8 классе учится Вова	*A* <u>и</u> *B*: В 8 классе учатся Антон и Вова
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
ложно	истинно	ложно
ложно	ложно	ложно

Нетрудно понять, как устроена эта таблица. Даны два предложения, каждое из которых может становиться либо истинным, либо ложным высказыванием. В итоговом столбце (отмеченном цветом) указано, каким – истинным или ложным – является соответствующее сложное высказывание.

Рассмотрим теперь следующее сложное предложение с союзом «или»:

«В 8 классе учится Антон **<u>или</u>** Вова».

Это сложное высказывание истинно в том и только в том случае, когда хотя бы один из мальчиков с указанным именем учится в 8 классе, то есть если истинно хотя бы одно из исходных высказываний, во всех остальных случаях оно – ложно.

Зафиксируем этот факт в таблице:

A: В 8 классе учится Антон	*B*: В 8 классе учится Вова	*A* <u>или</u> B: В 8 классе учится Антон или Вова
истинно	истинно	истинно
истинно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
ложно	ложно	ложно

В математике у таких сложных высказываний есть специальные названия – *конъюнкция* и *дизъюнкция*.

Определение **1. Конъюнкцией высказываний** A и B называется высказывание «A и B», которое истинно, когда A и B одновременно истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний A и B ложно.

Конъюнкция высказываний A и B обозначается $A \wedge B$.

Для определения истинности (ложности) конъюнкции можно использовать следующий *критерий*.

Критерий истинности сложного высказывания с союзом «и»

Конъюнкция $A \wedge B$ истинна в том и только в том случае, когда *оба* высказывания A, B истинны.

Определение **2. Дизъюнкцией высказываний** A и B называется высказывание «A или B», которое истинно, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно, и ложно, когда A и B одновременно ложны.

Дизъюнкция высказываний A и B обозначается $A \vee B$.

Для определения ложности (истинности) дизъюнкции можно использовать следующий *критерий*.

Критерий ложности сложного высказывания с союзом «или»

Дизъюнкция $A \vee B$ ложна в том и только в случае, когда *оба* высказывания A, B ложны.

Отметим, что логическое «или» несколько отличается от обыденного. В жизни предлог «или» обычно означает, что верно ровно одно из двух высказываний. Например, когда человек говорит: «В выходные я поеду на дачу или в пансионат», то мы понимаем, что он планирует выбрать одно и только одно из этих двух мест отдыха. Логическое же «или» означает, что, кроме этого, могут быть верны оба высказывания одновременно.

* * *

Предложения с переменными при подстановке значений переменных могут, как и высказывания, принимать два значения: «истина» и «ложь». Поэтому к ним применимы все операции логики высказываний: следование, отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. При этом все операции сохраняют тот же смысл, что и для обычных высказываний.

Таким образом, из простых предложений с переменными можно строить сложные предложения. Например, из предложений:

$A(m)$: «Натуральное число m четное»

$B(n)$: «Натуральное число n четное»

можно составить следующие сложные предложения:

$A \wedge B$: «Натуральное число m четно **и** натуральное число n четно»,

$A \vee B$: «Натуральное число m четно **или** натуральное число n четно».

Эти предложения можно сформулировать короче:

$A \wedge B$: «Натуральные числа m и n четны»;

$A \vee B$: «Хотя бы одно из натуральных чисел m или n четно».

***Определение* 3. Конъюнкцией двух предложений с переменными** $A(n)$ и $B(m)$ называется предложение «$A(n)$ и $B(m)$», которое принимает значение «истина» при тех и только тех значениях переменных, при которых каждое из предложений принимает значение «истина» и значение «ложь» – во всех остальных случаях.

Попробуйте самостоятельно составить определение для дизъюнкции двух предложений с переменной.

На диаграмме Эйлера–Венна множество истинности конъюнкции $I_{A \wedge B}$ будет изображаться *пересечением* множеств истинности предложений $A(n)$ и $B(m)$, то есть множеством *общих точек* множеств I_A и I_B (рис. 3).

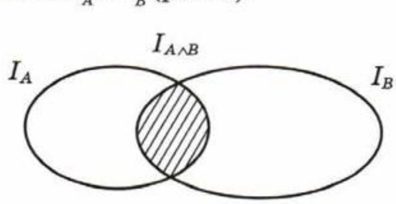


Рис. 3

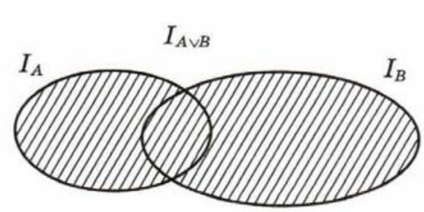


Рис. 4

Множество истинности дизъюнкции $I_{A \vee B}$ будет изображаться *объединением* множеств истинности A и B, то есть множеством точек, принадлежащих *хотя бы одному* из множеств I_A или I_B (рис. 4).

Таким образом, для определения истинности и ложности сложных предложений с переменными можно использовать следующие *критерии.*

Критерий истинности предложений A, B с переменными

Конъюнкция $A \wedge B$ истинна только при таких значениях переменных, при которых *оба* предложения A, B становятся истинными высказываниями.

Дизъюнкция $A \vee B$ ложна только при таких значениях переменных, при которых оба предложения A, B становятся ложными высказываниями.

Попробуем построить еще более сложные предложения – отрицание конъюнкции и дизъюнкцию отрицаний. Чтобы нам легче было установить новые логические законы, применим отрицание к рассмотренной выше конъюнкции $A \wedge B$: «Натуральные числа m и n четны», а затем сравним полученное предложение с дизъюнкцией отрицаний $\bar{A} \vee \bar{B}$.

Составим таблицу.

Формула	Понимание смысла предложения	Окончательная формулировка
$\overline{A \wedge B}$	Неверно, что натуральные числа m и n четны.	Хотя бы одно из натуральных чисел m или n нечетно.
$\bar{A}$	Неверно, что натуральное число m четно.	Натуральное число m нечетно.
$\bar{B}$	Неверно, что натуральное число n четно.	Натуральное число n нечетно.
$\bar{A} \vee \bar{B}$	Натуральное число m нечетно или натуральное число n нечетно.	Хотя бы одно из натуральных чисел m или n нечетно.

Сравним $\overline{A \wedge B}$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$. Замечаем, что отрицание конъюнкции предложений A и B ***совпало*** с дизъюнкцией отрицаний этих предложений: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$. Этот факт можно доказать в общем виде.

Теорема 1.

Отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний:

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$$

Доказательство:

Пусть при некоторых значениях переменных предложение $\overline{A \wedge B}$ истинно. Это означает, что на этом множестве предложение $A \wedge B$ ложно или, другими словами, хотя бы одно из предложений A или B ложно. Но тогда хотя бы одно из предложений $\bar{A}$ или $\bar{B}$ истинно, а значит, и $\bar{A} \vee \bar{B}$ истинно.

Пусть теперь при некоторых значениях переменных предложение $\overline{A \wedge B}$, наоборот, ложно. Это означает, что на данном множестве предложение $A \wedge B$ истинно, то есть оба предложения A и B истинны. Но тогда оба предложения $\bar{A}$ и $\bar{B}$ ложны, и поэтому предложение $\bar{A} \vee \bar{B}$ тоже ложно.

Итак, мы получили, что на определенном множестве предложения $\overline{A \wedge B}$ и $\bar{A} \vee \bar{B}$ становятся одновременно истинными или одновременно ложными высказываниями. Значит, $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.

Отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний:

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Докажите это утверждение самостоятельно.

Полученные утверждения называются **формулами де Моргана.** Они верны для любых двух высказываний или предложений с переменными A, B.

Формулы де Моргана

Отрицание конъюнкции равносильно дизъюнкции отрицаний: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

Отрицание дизъюнкции равносильно конъюнкции отрицаний: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Формулы де Моргана дают нам право в рассуждениях на равносильную замену следующих предложений:

«Неверно, что A **и** B» $\Leftrightarrow$ «Не A **или** не B»

«Неверно, что A **или** B» $\Leftrightarrow$ «Не A **и** не B»

Удивительным образом эти правила помогают разобраться в чисто практических жизненных ситуациях – при решении различных юридических споров, вопросов о сохранении имущества и др.

Задача 1.

Страховая компания не может заключить договор, если[3] клиент не оплатит страховой взнос или не предоставит справку о состоянии здоровья. В каком случае страховая компания заключит договор с клиентом?

Решение:

Запишем данное высказывание в виде: «Клиент не может заключить договор, если будет A». При этом высказывание A: «Клиент не оплатит страховой взнос или не предоставит справку о состоянии здоровья» можно записать как сложное высказывание вида «B или C», где:

B: «Клиент не оплатит страховой взнос»,

C: «Клиент не предоставит справку о состоянии здоровья».

Значит, компания *не заключит* договор, если будет истинна дизъюнкция $B \vee C$, и, соответственно, *заключит* договор, если будет истинно ее отрицание $\overline{B \vee C}$.

Как же можно переформулировать это отрицание, чтобы стало понятно, что должен сделать клиент, чтобы договор был заключен?

По закону де Моргана высказывание $\overline{B \vee C}$ означает то же самое, что и $\overline{B} \wedge \overline{C}$. В свою очередь, $\overline{B} \wedge \overline{C}$ можно сформулировать так: «Клиент оплатит страховой взнос и предоставит справку о состоянии здоровья».

Ответ: чтобы страховая компания заключила договор с клиентом, клиент должен оплатить страховой взнос и предоставить справку.

Полученные правила имеют важное значение. Раз усвоенные, они применяются затем автоматически, освобождая нас от необходимости каждый раз проводить сложные рассуждения.

[3] Строго говоря, здесь подразумевается «если и только если».

К **62** Даны высказывания A и B. Объедините их в одно высказывание с помощью союзов «и», «или».

A: сегодня алгебра – первый урок по расписанию;
B: сегодня алгебра – второй урок по расписанию.

Прочитайте в учебнике, как называются полученные сложные высказывания.

Чем отличается смысл логического «или» от обыденного понимания смысла этого союза?

63 Даны высказывания A и B. Сформулируйте их конъюнкцию и дизъюнкцию. Какое из полученных высказываний истинно?

A: неправильная дробь равна единице;
B: неправильная дробь больше единицы.

64 Даны предложения A и B. Сформулируйте $A \wedge B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A: целое число n меньше, чем 1;
B: целое число n больше, чем -1.

б) A: натуральное число n делится на 3;
B: натуральное число n делится на 5.

в) A: натуральное число n нечетно;
B: остаток от деления натурального числа n на 3 равен 1.

г) A: p – простое число;
B: p является факториалом натурального числа.

Образец:

а) A: целое число n меньше, чем 1;
B: целое число n больше, чем -1.

Решение:

1) Сформулируем $A \wedge B$: «Целое число n меньше, чем 1, и одновременно больше, чем -1».

2) Придадим ему «более красивый» вид, для этого сформулируем предложение C, равносильное $A \wedge B$ и не содержащее в своей формулировке союза «и»: «Целое число n равно 0».

3) Докажем, что $A \wedge B \Leftrightarrow C$. По свойству целых чисел между -1 и 1 содержится ровно одно целое число – 0, ч.т.д.

Ответ: целое число равно 0.

65 Даны предложения A и B. Сформулируйте $A \vee B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A: остаток от деления натурального числа n на 4 равен 1;
B: остаток от деления натурального числа n на 4 равен 3.

б) A: натуральное число n делится на 3;
B: натуральное число n нечетно.

в) A: натуральное число n четно;
B: остаток от деления натурального число n на 5 равен 2.

г) A: сумма чисел x и y равна 0;
B: кубы чисел x и y равны.

Образец:

а) A: остаток от деления натурального числа n на 4 равен 1;
B: остаток от деления натурального числа n на 4 равен 3.

Решение.

1) Сформулируем $A \vee B$: «Остаток от деления натурального числа n на 4 равен 1 или 3».

2) Придадим ему «более красивый» вид, для этого сформулируем предложение C, равносильное $A \vee B$ и не содержащее в своей формулировке союза «или»: «Натуральное число n нечетно».

3) Докажем, что $A \vee B \Leftrightarrow C$. Остаток от деления n на 4 может равняться 0, 1, 2, 3. Если он равен 0 или 2, то n четно; если он равен 1 или 3, то n нечетно. Поэтому при некотором n предложения C и $A \vee B$ становятся одновременно истинными или одновременно ложными, то есть $A \vee B \Leftrightarrow C$, ч.т.д.

Ответ: натуральное число n нечетно.

66 Даны высказывания:

A: Дробь 7,(9) является периодической;

B: Дробь 7,(9) является положительной.

1) Постройте конъюнкцию этих высказываний. Постройте отрицание полученного сложного высказывания $\overline{A \wedge B}$.

2) Постройте отрицание каждого из высказываний. Составьте их дизъюнкцию $\overline{A} \vee \overline{B}$.

3) Сравните утверждения, полученные вами. Что вы замечаете? Сформулируйте гипотезу. Сравните ее с формулами де Моргана на стр. 29.

67 Придумайте свой пример сложного высказывания со связкой «и» и связкой «или», постройте их отрицания.

П **68** Функция задана формулой. Найдите ее область определения:

а) $y = -5x + 4$;
б) $y = 2$;
в) $y = 2x^2$;
г) $y = \frac{2}{x^2}$;
д) $y = \frac{x}{2}$;
е) $y = \frac{\frac{3}{4}x^3}{x}$;
ж) $y = \frac{x-7}{x-8}$;
з) $y = \frac{(x-4,2)x}{(8,3-x)(x+4,2)}$.

69 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку $R(6; -1,5)$:

а) определите коэффициент пропорциональности;

б) постройте график данной функции;

в) принадлежат ли графику точки $S(-18; 74)$, $Q(20; 80)$, $P(0,75; -3)$?

70 Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку M:

а) $f(x)=3x-5$, $M(-\frac{2}{3};\ -7)$;

б) $f(x)=-0{,}1x-8$, $M(10;\ 8)$;

в) $f(x)=20-\frac{4}{5}x$, $M(25;\ 0)$;

г) $f(x)=6x$, $M(-1;\ -6{,}7)$.

71 Найдите точку пересечения графиков функций:

а) $y=2x-2$ и $y=-x-5$;

б) $y=0{,}5x-1$ и $y=-0{,}5x-3$.

72 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y=\begin{cases}2x+3, \text{ если } x \geqslant 1;\\ 3x+2, \text{ если } x < 1;\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}-2x+15, \text{ если } x \geqslant 6;\\ 3, \text{ если } 2 \leqslant x < 6;\\ 5-x, \text{ если } x < 2.\end{cases}$

73 Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x)=0{,}5x+2$; б) $f(x)=-3x-6$; в) $f(x)=|x+2|$; г) $f(x)=|2x-6|$.

С помощью графика определите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат Ox и Oy;
б) при каких значениях аргумента график расположен выше оси Ox;
в) при каких значениях аргумента график расположен ниже оси Ox.

Д **74** Даны предложения A и B. Сформулируйте $A \wedge B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A: число x меньше или равно 3;
B: число x больше или равно 3.

б) A: число x отрицательно;
B: произведение чисел x и y положительно.

в) A: сумма квадратов чисел x и y больше или равна 1;
B: число x больше или равно 1.

г) A: данный четырехугольник является прямоугольником;
B: данный четырехугольник является ромбом.

Постройте отрицание одной из составленных вами конъюнкций.

75 Даны предложения A и B. Сформулируйте $A \vee B$ и придайте ему «более красивый» вид.

а) A: числа x и y положительны;
B: числа x и y отрицательны.

б) A: натуральное число n не делится на 3;
B: натуральное число n не делится на 5.

в) A: число x больше 1;
B: число x меньше 1.

г) A: данный четырехугольник не является прямоугольником;
B: данный четырехугольник не является ромбом.

Постройте отрицание одной из составленных вами дизъюнкций.

76 а) Чтобы догнать свою группу, туристу необходимо было пройти по проселочной дороге, а затем подняться в гору. На рис.1 изображен график его движения. Определите, с какой скоростью турист шел по проселочной дороге, а потом – в гору (ответ дайте в км/ч).

б) Из пункта A вышел пешеход, а через некоторое время вслед за ним выехал велосипедист. На рис.2 изображены графики их движения. На сколько километров в час скорость велосипедиста больше, чем скорость пешехода? Через сколько минут велосипедист догнал пешехода и на каком расстоянии от пункта A?

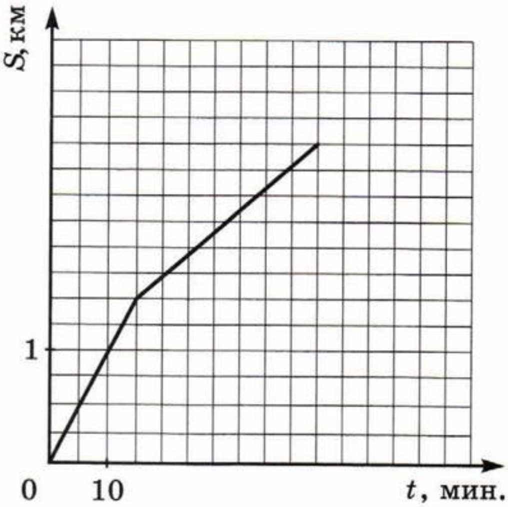


Рис.1

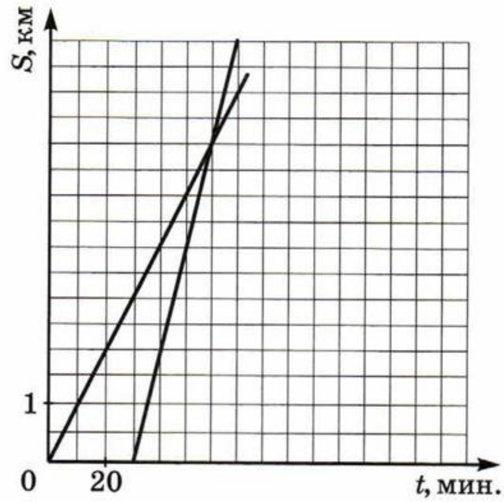


Рис. 2

77 Функция задана формулой. Найдите ее область определения:

а) $y = 2{,}5x$; в) $y = \dfrac{1}{2x}$; д) $y = \dfrac{x}{x(x-8)}$;

б) $y = x^3 + 1$; г) $y = \dfrac{2x-7}{3-1{,}5x}$; е) $y = \dfrac{7}{(3x-4)(0{,}25x-1)}$.

78 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$y = \begin{cases} -x+5, \text{ если } x \geqslant 6; \\ -1, \text{ если } -3 \leqslant x < 6; \\ x+2, \text{ если } x < -3 \end{cases}$$

1) вычислите: а) $y = f(0)$; б) $y = f(-8{,}2)$; в) $y = f(6)$; г) $y = f(8)$;

2) принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки $A\,(1;\,1)$, $B\,(-10;\,-8)$, $C\,(-1;-1)$, $D\,(-2;\,-4)$, $F\,(1;\,4)$, $R\,(15;\,-10)$.

79 Постройте график функции $y = f\,(x)$:

а) $f(x) = -4x + 4$; б) $f(x) = 2x + 5$; в) $f(x) = |x + 1|$.

С помощью графика определите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат Ox и Oy;
б) при каких значениях аргумента график расположен выше оси Ox;
в) при каких значениях аргумента график расположен ниже оси Ox.

С **80*** Докажите, что для любых высказываний A и B верны следующие утверждения:

а) $\overline{\overline{A} \wedge B} \Leftrightarrow A \vee \overline{B}$; в) $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \Leftrightarrow A \vee B$;

б) $\overline{A \vee \overline{B}} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge B$; г) $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \Leftrightarrow A \wedge B$.

2.* Законы логики для сложных высказываний

...к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звёзды или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера.

Рене Декарт (1596–1650),
французский математик, философ и физик

В этом пункте мы продолжим знакомиться с правилами логики сложных высказываний, которые помогут нам увидеть аналогии исследуемых в математике объектов и еще раз убедиться в том, эта наука позволяет раскрыть единство законов окружающего нас мира.

Обозначим заведомо истинное высказывание буквой I и заведомо ложное высказывание буквой O. Тогда для любого высказывания A верны утверждения, которые следуют из определений конъюнкции и дизъюнкции.

$$A \wedge I \Leftrightarrow A \qquad A \vee O \Leftrightarrow A$$
$$A \wedge O \Leftrightarrow O \qquad A \vee I \Leftrightarrow I$$

Проанализируем формулы с конъюнкцией: конъюнкция с высказыванием I не изменяет значение исходного высказывания A. Для любого высказывания A его конъюкция с заведомо ложным высказыванием O дает ложное высказывание, то есть O. Что напоминает нам эта операция? Конечно, умножение чисел на единицу и ноль. При этом заведомо истинное высказывание I играет роль единицы, а заведомо ложное высказывание O играет роль нуля.

Аналогично, формула $A \vee O \Leftrightarrow A$ подсказывает нам аналогию дизъюнкции со сложением с нулем. И хотя полной аналогии здесь нет (второе равенство не дает аналогию сложения с единицей), тем не менее, операцию конъюнкции часто называют «умножением высказываний», а операцию дизъюнкции – «сложением высказываний».

А будут ли логическое сложение и умножение удовлетворять основным законам арифметического сложения и умножения – переместительному, сочетательному, распределительному?

Опираясь на определения конъюнкции и дизъюнкции, можно сделать вывод, что значение конъюнкции или дизъюнкции не зависит от порядка высказываний. Значит, переместительные законы конъюнкции и дизъюнкции работают. Их можно описать следующими формулами.

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A; A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

Для сложных высказываний, состоящих из трех простых, составим законы, аналогичные сочетательным законам сложения и умножения:

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C); (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

Подобные логические равенства можно доказывать при помощи так называемых *таблиц истинности*.

В таблицах истинности рассматриваются всевозможные комбинации истинности (и) и ложности (л) исходных высказываний и устанавливается истинность или ложность соответствующих сложных высказываний. В нашем случае различных комбинаций значений A, B и C всего восемь. Составим таблицу и проверим, что во всех этих случаях обе части логического равенства одновременно истинны или одновременно ложны.

A	B	C	$A \vee B$	$\mathbf{(A \vee B) \vee C}$	$B \vee C$	$\mathbf{A \vee (B \vee C)}$
и	и	и	и	**и**	и	**и**
и	и	л	и	**и**	и	**и**
и	л	и	и	**и**	и	**и**
и	л	л	и	**и**	л	**и**
л	и	и	и	**и**	и	**и**
л	и	л	и	**и**	и	**и**
л	л	и	л	**и**	и	**и**
л	л	л	л	**л**	л	**л**

Мы видим, что высказывания $(A \vee B) \vee C$ и $A \vee (B \vee C)$ при соответствующих значениях исходных высказываний A, B и C одновременно истинны или одновременно ложны. Это дает нам право утверждать, что эти сложные высказывания равносильны (то есть логически эквивалентны). Аналогично можно доказать выполнение сочетательного закона конъюнкции.

Итак, таблицы истинности обладают следующим важным свойством.

Свойство таблиц истинности

Если таблицы истинности различных сложных высказываний, построенных на основе одних и тех же простых высказываний, совпадают во всех возможных комбинациях, то эти сложные высказывания *равносильны*.

Исходя из сочетательных законов логического сложения и умножения, порядок скобок в сложных высказываниях $A \vee (B \vee C)$ и $(A \vee B) \vee C$ не важен. Поэтому их можно опустить и записывать эти высказывания короче: $A \wedge B \wedge C$ и $A \vee B \vee C$.

Составим формулу логического распределительного закона умножения относительно сложения:

$$\boxed{(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$$

Убедимся в его выполнении с помощью таблицы истинности:

A	B	C	$A \vee B$	$\mathbf{(A \vee B) \wedge C}$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$\mathbf{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}$
и	и	и	и	**и**	и	и	**и**
и	и	л	и	**л**	л	л	**л**
и	л	и	и	**и**	и	л	**и**
и	л	л	и	**л**	л	л	**л**
л	и	и	и	**и**	л	и	**и**
л	и	л	и	**л**	л	л	**л**
л	л	и	л	**л**	л	л	**л**
л	л	л	л	**л**	л	л	**л**

Из этой таблицы видно, что данные сложные высказывания равносильны. Значит, распределительный закон логического умножения относительно сложения, как и в случае с арифметическими действиями, также верен.

Однако подчеркнем еще раз, что, несмотря на выявленную аналогию свойств логических и арифметических действий, полного их совпадения нет. Например, с помощью таблиц истинности можно доказать распределительный закон логического сложения относительно умножения:

$$\boxed{(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)}$$

Вместе с тем, аналогичный распределительный закон сложения относительно умножения $ab + c = (a + c)(b + c)$, очевидно, не выполняется.

Еще одним логическим законом, который часто используется для обоснования суждений, является закон де Моргана для трех и более высказываний:

$$\boxed{\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}; \quad \overline{A \vee B \vee C} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}}$$

Доказать его можно, применяя последовательно несколько раз формулы де Моргана для двух высказываний. Например,

$\overline{A \wedge B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{A \wedge (B \wedge C)} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \overline{B \wedge C} \Leftrightarrow \bar{A} \vee (\bar{B} \vee \bar{C}) \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$, ч.т.д.

Таким образом, логические законы можно доказывать не только с помощью таблиц истинности, но и используя логический вывод.

Законы для сложных высказываний помогают в решении логических задач.

Задача 1.

Три подружки спорили о результатах предстоящего кросса, который должны были бежать мальчики из их класса:

– Вот увидишь, Шурик не будет первым! Первым прибежит Макс.

– Да нет же, победителем будет, как всегда, Шурик. А Андрею и думать нечего о победе!

– Максу не видать первого места, а вот Андрей сейчас в самой хорошей спортивной форме!

По завершении забега оказалось, что каждое из двух предположений двоих из девочек подтвердилось, а оба предположения третьей оказались неверными. Кто прибежал первым?

Решение:

Введем обозначения для логических высказываний:

Ш – победит Шурик;

М – победит Макс;

А – победит Андрей;

С – Андрей в хорошей спортивной форме.

Тогда высказывания девочек можно записать следующим образом:

1: $\overline{Ш} \wedge М$;

2: $Ш \wedge \overline{А}$;

3: $\overline{М} \wedge С$.

Учитывая то, что предположения двух девочек подтвердились, а предположения третьей неверны, запишем истинное высказывание:

$$\left((\overline{Ш}\wedge М)\wedge(Ш\wedge\overline{A})\wedge\overline{(\overline{М}\wedge C)}\right)\vee\left((\overline{Ш}\wedge М)\wedge\overline{(Ш\wedge\overline{A})}\wedge(\overline{М}\wedge C)\right)\vee\left(\overline{(\overline{Ш}\wedge М)}\wedge(Ш\wedge\overline{A})\wedge(\overline{М}\wedge C)\right)$$

Заметим, что

$(\overline{Ш}\wedge М)\wedge(Ш\wedge\overline{A})\wedge\overline{(\overline{М}\wedge C)}=O$, так как $\overline{Ш}\wedge Ш=O$;

$(\overline{Ш}\wedge М)\wedge\overline{(Ш\wedge\overline{A})}\wedge(\overline{М}\wedge C)=O$, так как $\overline{М}\wedge М=O$;

$$\overline{(\overline{Ш}\wedge М)}\wedge(Ш\wedge\overline{A})\wedge(\overline{М}\wedge C)=(Ш\vee\overline{М})\wedge(Ш\wedge\overline{A})\wedge(\overline{М}\wedge C)=$$

$$=(Ш\wedge Ш\wedge\overline{A}\wedge\overline{М}\wedge C)\vee(\overline{М}\wedge Ш\wedge\overline{A}\wedge\overline{М}\wedge C)=$$

$$=(Ш\wedge\overline{A}\wedge\overline{М}\wedge C)\vee(\overline{М}\wedge Ш\wedge\overline{A}\wedge C)=\overline{М}\wedge Ш\wedge\overline{A}\wedge C.$$

Поэтому исходное высказывание равно $O\vee O\vee\overline{М}\wedge Ш\wedge\overline{A}\wedge C=\overline{М}\wedge Ш\wedge\overline{A}\wedge C$. Значит, победителем забега стал Шурик, несмотря на то, что у Андрея действительно была самая лучшая спортивная форма.

Сложные высказывания, полученные, казалось бы, из абстрактных логических рассуждений, оказываются весьма полезны для решения не только математических, но и жизненно важных практических задач.

К **81** 1) Из данных утверждений выберите те, смысл которых вам ясен. Как они называются?

а) $\overline{A\wedge B}\Leftrightarrow\bar{A}\vee\bar{B}$; б) $\overline{A\vee B}\Leftrightarrow\bar{A}\wedge\bar{B}$; в) $A\wedge I\Leftrightarrow A$; г) $A\vee O\Leftrightarrow A$.

2) Чтобы разобраться со смыслом двух последних записей, действуйте по плану:

1. Узнайте, какие высказывания принято обозначать буквами I и O.

2. Познакомьтесь со способами доказательств равносильности сложных высказываний.

3. Докажите равносильность $A\wedge I$ и A при помощи таблицы истинности.

4. Докажите равносильность $A\vee O$ и A при помощи таблицы истинности.

82 Докажите при помощи таблицы истинности, что для любых трех высказываний A, B, C справедливо утверждение

$$(A\wedge B)\vee C\Leftrightarrow(A\vee C)\wedge(B\vee C).$$

83 Докажите при помощи таблицы истинности формулу де Моргана для трех высказываний $\overline{A\wedge B\wedge C}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}$.

84 Докажите формулу де Моргана для трех высказываний $\overline{A\vee B\vee C}\Leftrightarrow\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}$:

а) при помощи таблицы истинности;

б) при помощи формул де Моргана для двух высказываний.

85 Составьте таблицы истинности для высказываний:

а) $\left(\overline{A\wedge\overline{B}}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge C\right)$; б) $(A\vee B)\wedge\left(\overline{\overline{A}\vee C}\right)$; в) $\left(\overline{A\wedge B}\right)\vee\left(\overline{\overline{A}\wedge C}\right)$.

86 Докажите, что для любых высказываний A, B и C верны следующие утверждения:

а) $\overline{A\wedge B\wedge\overline{C}}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}\vee C$; б) $\overline{\overline{A}\vee B\vee C}\Leftrightarrow A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}$; в) $\overline{A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}}\Leftrightarrow\overline{A}\vee B\vee C$.

П **87** Решите уравнение, содержащее модули:

а) $|a-2{,}5|=5$;

б) $|3n+7|=-10$;

в) $-|7{,}5m-2{,}5|=-10$;

г) $-|11+2r|=|r-3{,}2|$;

д) $|2{,}8d-16{,}94|=0$;

е) $|3x-2|=|6-x|$.

88 Решите уравнение, содержащее модули:

а) $\left|\frac{1}{4}t-3\right|+\left|\frac{1}{2}t+2\right|=6$;

б) $|2{,}5y-1|-|3-1{,}5y|=8$;

в) $|a-5|+|4+a|=-7$;

г) $2|h-3|-|4-h|+|h+5|=10$.

89 Решите задачу, используя алгоритм решения линейных уравнений в целых числах.

а) Задумали два натуральных числа. Известно, сумма утроенного первого числа и увеличенного в четыре раза второго числа равна 92. Найдите задуманные числа.

б) Для продажи орехи расфасовали в пакеты либо по 500 г, либо по 250 г. Сколько надо заготовить тех и других пакетов для упаковки 10 кг орехов?

90 Решите неравенство, содержащее модули:

а) $3\cdot\left|2\frac{2}{3}x+1\right|\leqslant 5$;

б) $|2{,}4b-0{,}2|>5$;

в) $|7y-2|\leqslant -0{,}1$;

г) $|8d-16|>-1$;

д) $|k-16|<|9-4k|$;

е) $|z+3|>|z-5|$;

ж) $|2s-14|\geqslant|3s+6|$;

з) $|3m-5|\leqslant|2m+9|+12$;

и) $|s-3|+|s+7|\leqslant -8$;

к) $|q+16|+|6-q|<12$;

л) $|4p-16|-|p+5|\geqslant 8$;

м) $|2x-11|-|13-x|<-10$.

91 Найдите значения переменной, которые обращают данное предложение в верное высказывание:

а) $|c-9|-|5-c|+|2c+4|<2$;

б) $|4l-8|+|5l+10|-|7l-21|>20$.

Д **92** Докажите утверждения при помощи таблицы истинности:

а) $A\vee I\Leftrightarrow I$;

б) $A\wedge O\Leftrightarrow O$.

93 Докажите при помощи диаграммы Эйлера–Венна формулу де Моргана для трех высказываний $\overline{A\vee B\vee C}\Leftrightarrow\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}$.

94 Докажите при помощи таблицы истинности формулу де Моргана для трех высказываний $\overline{A\wedge B\wedge C}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}$.

95 Составьте таблицы истинности для высказываний:

а) $\left(\overline{A\vee\overline{B}}\right)\wedge\left(\overline{\overline{A}\vee C}\right)$;

б) $\left(\overline{A\wedge B\wedge\overline{C}}\right)\vee\left(\overline{A}\wedge C\right)$;

в) $\left(\overline{A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}}\right)\vee\left(\overline{\overline{A}\wedge C}\right)$;

г) $\left(\overline{A}\vee\overline{B}\right)\wedge\left(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C\right)\wedge\overline{C}$.

96 Решите уравнение, содержащее модули:

а) $-|4{,}5d-18|=|1{,}5d-(-9)|$;

б) $|5t-6|+|12-t|=0$;

в) $|13s+1|+|8-3s|=-5$;

г) $|12z-24|+|7+z|=32$;

д) $|x+2{,}3|-|x-2{,}7|=2$;

е) $|p+2|+|p-6|-|12-p|=-18$.

97 а) Задумали два натуральных числа. При этом удвоенное первое число равно разности числа 63 и второго числа, увеличенного в пять раз. Найдите задуманные числа.

б) Бабушка сварила 20 л варенья. В шкафу у нее есть 0,5 л и 0,7 л банки. Сколько 0,5 л и 0,7 л банок надо подготовить бабушке? Сколькими способами она может разложить варенье по банкам?

98 Докажите, что число 10 является решением неравенства $|q+1|>|8-q|-4$.

99 Решите неравенство с модулем:

а) $|q+4|<2$; б) $|2b-1|>3{,}8$; в) $|5h-3|\leqslant -10$.

100 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $|6x-1|$ меньше 13;

б) значение выражения $|2t+3|$ больше или равно значению выражения $|14-t|$;

в) значение выражения $|8+p|-|p-2|$ отрицательно;

г) значение выражения $|3y+12|+|6-3y|$ положительно;

д) значение суммы выражений $|a-13|$ и $|2a+6|$ неположительно;

е) значение выражения $|1+m|-|m+2|+|m-4|$ неотрицательно?

C **101*** Докажите, что для любых высказываний A, B и C верны следующие утверждения:

а) $\overline{\overline{A}\vee\overline{B}\vee C}\Leftrightarrow A\wedge B\wedge\overline{C}$; б) $\overline{A\wedge B\wedge\overline{C}}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}\vee C$; в) $\overline{\overline{A}\vee\overline{B}\vee\overline{C}}\Leftrightarrow A\wedge B\wedge C$.

Друзья!

Мы предлагаем вам ***экспресс*-тест**, с помощью которого вы сможете *самостоятельно* определить свой уровень усвоения материала этой главы. Выполнив эту работу, вы получите *оперативную информацию* о том, что вы уже умеете делать и над чем еще следует поработать. При выполнении теста ориентируйтесь на указанное *время*.

Как вам подсчитать итоговую сумму баллов? Очень просто: за каждое верно выполненное задание (части А или части В) выставляйте себе по одному баллу. За каждое выполненное задание с развёрнутым ответом (часть С) – от 1 до 3 баллов в соответствии с предложенной таблицей:

3 балла	решение верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ
2 балла	решение в целом верное, получен верный ответ, однако решение нерациональное или обосновано недостаточно
1 балл	решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка

Для проверки после теста представлен *образец* его выполнения. Для оценки – *шкала успешности*. Важно помнить, что свой результат можно повысить, если разобраться, где и почему допущены ошибки, и потренироваться в выполнении аналогичных заданий.

Экспресс-тест № 1

Примерное время выполнения – 40 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Выберите верное равенство:

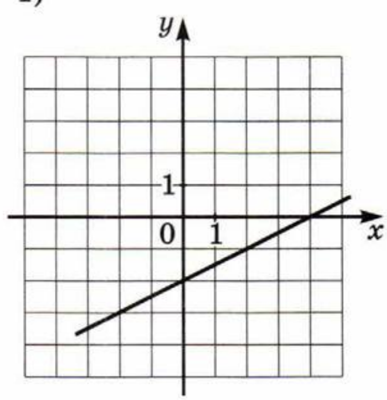
А) $b^6 - a^4 = (b^3 + a^2)(a^2 - b^3)$; В) $m^8 - 2m^4 + 0{,}25 = (m^4 - 0{,}5)^2$;

Б) $x^2 - 3x + 6 - 2x = (3 - x)(2 - x)$; Г) $q^6 - 8 = (q^2 - 2)(q^4 - 2q^2 + 4)$.

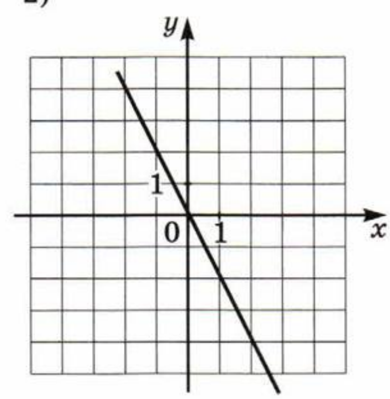
№ 2			
1	2	3	4

№ 2. Установите соответствие между графиками линейной функции $y = kx + b$ и значениями коэффициентов k и b.

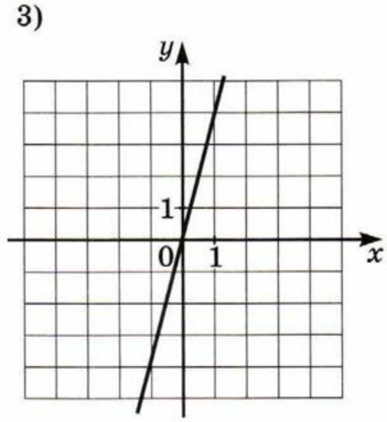
1)



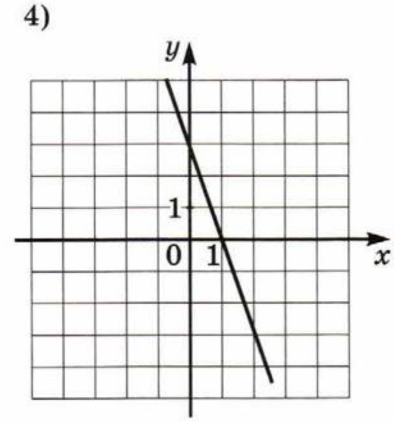
2)



3)



4)



А) $k = -2,\ b = 0$; Б) $k = 4,\ b = 0$; В) $k = -3,\ b = 3$; Г) $k = \frac{1}{2},\ b = -2$.

№ 3

№ 3. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

$18k + (-32k + 2) < 7{,}2(2k + 3) - (5{,}6 - 13{,}6k)$

А) нет целых решений; Б) 1; В) 0; Г) −1.

№ 4

№ 4. Решите уравнение: $(d + 4)^2 - (d + 3)(3 - d) = 2d(d + 4) - 3$.

А) бесконечно много решений; Б) −3;3; В) 2,5; Г) $\varnothing$.

Часть B

№ 5

№ 5. Определите, какое слово или словосочетание надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.
«Для того чтобы график линейной функции $y = kx + b$ проходил через точку $(-3; 3)$ ..., чтобы коэффициенты были равны $k = -\frac{2}{3}$, $b = 1$»

А) «необходимо»; Б) «достаточно»; В) «необходимо и достаточно».

№ 6

№ 6. Разложите на множители левую часть уравнения, выделяя полный квадрат, и решите уравнение:

$$x^2 - 4x - 32 = 0.$$

А) -4; 8; Б) нельзя выделить полный квадрат; В) 0;8; Г) 0;4.

Часть C

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 7. Решите задачу:
Учащиеся параллели 8 классов приняли участие в трехдневной благотворительной акции, проводимой кинотеатрами города. Число выкупленных ими билетов в первый и во второй день относится как 2:3. В третий день восьмиклассники выкупили на 60% больше билетов, чем в первый день. Известно, что в последний день акции ими было куплено на 36 билетов меньше, чем за первые два дня. Сколько денег поступило на благотворительный счет от восьмиклассников, если один билет стоил 200 рублей?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2				№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
	1	*2*	*3*	*4*				
Б	*Г*	*А*	*Б*	*Г*	*В*	*Г*	*Б*	*А*

№ 7

Обозначим количество билетов, купленных в первые два дня $2k$ и $3k$. Тогда $1{,}6 \cdot 2k$ – число билетов, купленных в третий день. Известно, что в третий день выкуплено на 36 билетов меньше, чем в первые два дня. Получим модель задачи:

$$(2k + 3k) - 1{,}6 \cdot 2k = 36 \iff k = 20$$

$$200 \cdot (2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1{,}6 \cdot 2 \cdot 20) = 32800$$

Ответ: 32 800 рублей поступило на счет от восьмиклассников.

Шкала успешности:

8–9 баллов – *отлично*
6–7 баллов – *хорошо*
5 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к Главе 1

102 Вычислите устно:

а) $\frac{1}{4}:0{,}5$ $\cdot(-20)$ $-3\frac{1}{3}$ $:\left(-3\frac{1}{3}\right)$?

б) $-0{,}9:0{,}02$ $\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$ $-(-\frac{1}{9})$ $:\left(\frac{1}{9}\right)$?

в) $-0{,}25+\frac{3}{4}$ $\cdot\left(-2\frac{1}{8}\right)$ $+\frac{1}{16}$ $:2\frac{3}{7}$?

г) $3{,}6\cdot\frac{1}{4}$ $:1\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{5}$ $-0{,}4^2$?

103 Найдите значение выражения:

а) $3:\frac{9}{16}+\frac{5}{8}:3-3\frac{1}{2}:3+6:1\frac{1}{2}+2\frac{3}{8}:3\frac{4}{5}$;

б) $4\frac{2}{9}\cdot7\frac{2}{19}:3\frac{4}{5}\cdot5{,}7$.

104 Найдите 20% от значения выражения:

а) $\dfrac{(8\cdot0{,}5-0{,}2):3\frac{4}{5}}{\left(\left(12\frac{2}{5}-6\right):\frac{8}{15}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{83}}$;

б) $\dfrac{\left(13{,}25-\frac{5}{8}-2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\right):\frac{1}{8}}{\left(1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right):3\frac{3}{4}+6\frac{2}{3}}$.

105 **Эстафета.**

1. Найти значение одночлена $\frac{1}{4}d^4$, если $d=-2$.

2. Вычислить: $\dfrac{(2^5)^2\cdot3^{10}}{6^7}$.

3. Решить уравнение: $2^{2n+5}=512$.

4. Найти коэффициент одночлена: $\left(5^2\right)^5\cdot m\dfrac{1}{\left(5^3\right)^4}\cdot n\cdot\dfrac{5^3}{5^0}\cdot k$.

5. Вычислить: $\dfrac{3^{10}\cdot27}{9^6}$.

106 Возведите в степень:

а) $(a+2b)^2$; б) $(x^3-3y)^2$; в) $(-m-k)^3$; г) $(4+d^2)^3$.

107 Запишите как многочлен стандартного вида:

а) $3a(a-4)(a+4)$;

б) $2x(x^2-1)(x^2+1)$;

в) $t(t+2)(2-t)$;

г) $c(c^3+3)(3-c^3)$;

д) $(n+5)(n^2-5n+25)$;

е) $(2-a)(a^2+2a+4)$.

108 Запишите как многочлен стандартного вида:

а) $(z+10)(z-10)(z^4+100z^2+10\,000)$;

б) $(1+a)(a-1)(a^4+a^2+1)$.

109 Представьте многочлен в виде куба или квадрата двучлена:

а) $9x^2 + 6xy + y^2$;
б) $9a^2 + 30ab + 25b^2$;
в) $x^2 - 4xy + 4y^2$;
г) $-24a + 9 + 16a^2$;
д) $k^4 - 2k^2 + 1$;
е) $16s^4 + 48s^2 + 36$;
ж) $64 + 48d + 12d^2 + d^3$;
з) $216x^3 - 108x^2y + 18xy^2 - y^3$;
и) $(m + 5)(m^2 + 10m + 25)$;
к) $(mn - 1)(m^2n^2 - 2mn + 1)$.

110 Разложите многочлен на множители:

а) $7x + 7y + 3ax + 3ay$;
б) $8d^2 - 12d - 8bd + 12b$;
в) $121a^2 - 144\,b^2$;
г) $25c^2 - 81d^2$;
д) $216 + a^3$;
е) $n^6 - 64$.

111 Разложите многочлен на множители:

а) $(a - 2)^2 - 25$;
б) $9 - (d + 2)^2$;
в) $(c^2 + 10c + 25) - 1$;
г) $(a^2 + a + 0{,}25) - 2{,}25$.

112 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $c^2 + 10c + 24$;
б) $x^2 - 12x + 32$;
в) $a^2 + a - 30$;
г) $y^2 + 13y + 36$.

113 Решите уравнение, представляя многочлен в виде произведения:

а) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
б) $(2x - 1)^2 - 4 = 0$;
в) $c^2 - 0{,}16 = 0$;
г) $6x^2 - 2x = 0$;
д) $2x^2 + x - 6x - 3 = 0$;
е) $3a^2 + 7a + 2 = 0$.

114 Решите уравнение, выделяя полный квадрат:

а) $x^2 - 16x + 64 = 0$;
б) $x^2 - 16x + 63 = 0$;
в) $a^2 + a - 20 = 0$.

115 Решите неравенство:

а) $0{,}2x < 5$;
б) $-2x > 0{,}54$;
в) $22y - 0{,}3 \leqslant 4{,}1$;
г) $5 \geqslant -3 - 0{,}4y$;
д) $18 - 5x - 10 > 4x + 8 - 9x$;
е) $4\,(5a + 7) \leqslant -18 - 3(3a + 4)$;
ж) $-1{,}7\,(4 - 10c) - 5{,}4 \geqslant 5{,}3\,c - 0{,}7\,(9c + 6)$;
з) $2{,}5d + (-4{,}1d + 2{,}9) < 7{,}2 - 2{,}7\,(d + 2)$.

116 Решите неравенство, содержащее модули:

а) $|x + 4| < 8$;
б) $|2x - 5| \geqslant 3$;
в) $|5x + 20| > |4x - 12|$.

117 Постройте график функции:

а) $y = 2x$;
б) $y = -2x$;
в) $y = 2x + 4$;
г) $y = 2x - 4$.

Проанализируйте формулы, что в них общего? Какую из них можно считать «лишней» и по какому признаку?

118 Не строя графика функции $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если: а) $k = 3{,}4$; б) $k = -0{,}4$.

119 На рисунке 1 представлен график линейной функции $y = kx + b$. Какие знаки имеют коэффициенты k и b?

120 Мобильная компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф «Выгода» и тариф «Эконом». Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически на рисунке 2. Ответьте по рисунку на вопросы:

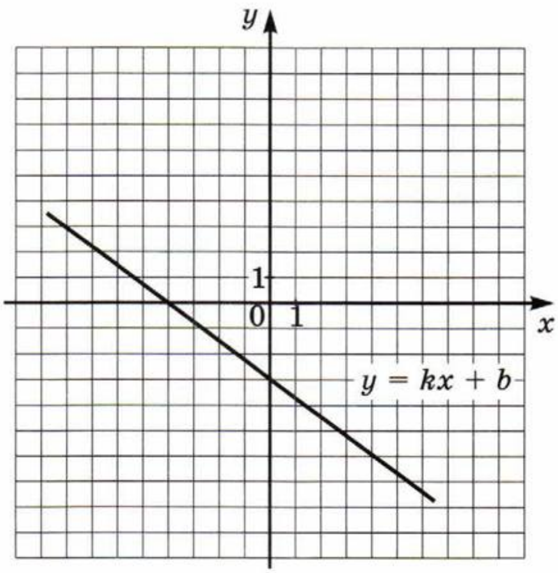


Рис. 1

Рис. 2

1) Определите, являются ли данные зависимости функциями, и если да, то какими?

2) Какой из тарифов предлагает «каждую третью минуту разговора в подарок»?

3) Какой из тарифов выгоднее для абонента, который разговаривает менее 2 минут?

4) Какой из тарифов выгоднее для абонента, продолжительность разговора которого более 2 минут?

5) Сколько длится разговор, стоимость которого одинакова по двум тарифам?

6) На сколько минут хватит 4 рублей по тарифу «Выгода», по тарифу «Эконом»?

121 Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точки $A(0;\ 1)$, $B(-2;5)$:

а) $f(x) = 2x + 1$; в) $f(x) = -0{,}5x + 4$;

б) $f(x) = -2x + 1$; г) $f(x) = 3x + 1$.

122 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} x+2, \text{ если } x \geqslant 1; \\ 3x, \text{ если } x < 1 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2x-1, \text{ если } x \geqslant -2; \\ -x-7, \text{ если } x < -2 \end{cases}$

123 а) В школе три восьмых класса. Известно, что в «А» классе учится на 10% больше учеников, чем в «Б» классе, а число учеников «Б» класса относится к числу учеников «В» класса как 3 к 2,8. Сколько учеников в 8 «А», если известно, что число восьмиклассников в этой школе равно 91.

б) Загаданы четыре числа. Известно, что первые три относятся как $3:4:1$, а четвертое число на 20% меньше третьего. Найдите произведение этих чисел, если среднее арифметическое этих чисел равно 110.

124 Участники школьной олимпиады по математике среди 8 классов показали следующие результаты:

Участник	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Баллы	15	18	22	31	17	21	35	30	14	17

Найдите размах набора значений, указанных в таблице.

Найдите медиану и моду набора значений, указанных в таблице.

Найдите среднее значение баллов участников олимпиады.

Какое значение приняли бы эти величины, если бы в олимпиаде не принял участие школьник, набравший наименьшее число баллов?

125 Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

а) A: последнюю неделю температура на улице не повышалась выше $-10\,^{\circ}\mathrm{C}$;
B: лужи на улице покрыты льдом.

б) A: вчера восьмиклассник Вася заболел ангиной;
B: сегодня восьмиклассник Вася не пришел в школу.

в) A: график линейной функции $y = kx + b$ проходит через точки $(1; 3)$ и $(2; 4)$;
B: $k = 1$, $b = 2$.

г) A: a и b – целые ненулевые числа;
B: ab – целое ненулевое число.

д) A: a и b – целые ненулевые числа;
B: $a + b$ – целое ненулевое число.

е) A: a и b – целые ненулевые числа;
B: $a - b$ – целое ненулевое число.

ж) A: a и b – целые ненулевые числа;
B: $\frac{a}{b}$ – целое ненулевое число.

з) A: сумма числа a и b кратна 8;
B: каждое из чисел a и b делится на 8.

и) A: произведение чисел a и b кратно 18;
B: число a делится на 6, а число b делится на 3.

к) A: площадь прямоугольника равна 48 см^2;
B: две из сторон прямоугольника равны 6 см и 8 см.

126 Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте. Из каких предложений можно составить критерий?

а) a и b – целые числа.
A: a и b – нечетные;
B: ab – нечетно.

б) a и b – целые числа.
A: a и b – четные;
B: ab – нечетно.

в) a и b – целые числа.
A: a и b – нечетные;
B: ab – четно.

г) a и b – целые числа.
A: a и b – четные;
B: ab – четно.

д) a и b – натуральные числа.
A: a и b – четные числа;
B: $a^2 - b^2$ делится на 4.

е) a и b – натуральные числа.
A: a и b – нечетные числа;
B: $a^2 - b^2$ делится на 4.

ж) a и b – натуральные числа.
A: a и b делятся на 3;
B: $a^2 + b^2$ делится на 3.

з) n – натуральное число.
A: n – нечетное число;
B: $n^3 - n$ делится на 24.

и) a и b – натуральные числа.
A: a и b не делятся на 3;
B: $ab - 1$ делится на 3.

к) a и b – натуральные числа.
A: a и b не делятся на 3;
B: $ab + 1$ делится на 3.

л) a и b – натуральные числа.
A: a и b делятся на 3;
B: $a + 2b$ делится на 3.

м) m и n – натуральные числа.
A: НОД$(m, n) = 5$;
B: m и n делятся на 5.

н) m и n – натуральные числа.
A: НОД$(m, n) = n$;
B: m делятся на n.

о) m и n – натуральные числа.
A: НОД$(m, n) = 60$;
B: число 60 делится и на m и на n.

п) m и n – натуральные числа.
A: НОК$(m, n) = m$;
B: m делятся на n.

р) a – положительное число.
A: число a больше своего квадрата;
B: число a меньше единицы.

с) A: число a больше 1;
B: квадрат числа a больше единицы.

т) A: число a больше 1;
B: куб числа a больше единицы.

у) A: число a – рациональное;
B: число a представимо в виде конечной десятичной дроби.

127 Сформулируйте высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Какое из них верное, а какое – ложно? Ответ обоснуйте.

а) a, b, m – натуральные числа.
A: $a \equiv b \pmod{m}$;
B: $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$.

б) A: $|a| + |b| > |a + b|$;
B: $ab < 0$.

в) A: $|a| + |b| > |a - b|$;
B: $ab > 0$.

г) A: $|a| + |b| = |a + b|$;
B: $ab > 0$.

д) A: $|a| + |b| = |a - b|$;
B: $ab < 0$.

е) A: $|a| + |b| = |a + b|$;
B: a и b – неотрицательные числа.

Глава 2

Системы линейных уравнений и неравенств

§ 1. Системы линейных уравнений

1. Линейное уравнение с двумя неизвестными и его график

Жизнь непрерывно требует от математика ответа на вопрос, как поступать в том или другом случае, при тех или других сложившихся обстоятельствах. И дело его чести — не уходить от этих требований в пучину абстракций, а по мере сил удовлетворять их.

Вентцель Елена Сергеевна (1907–2002),
советский математик, автор учебников
по теории вероятностей и исследованию операций

Метод решения задач с помощью уравнений, хорошо известный вам с пятого класса, часто упрощает поиск решения текстовых задач. Особенно в тех случаях, когда алгоритм решения уравнения, полученного при переводе условия задачи на математический язык, известен. Если же алгоритм неизвестен, то используют такие способы решения, как метод проб и ошибок, метод перебора, различные нестандартные приемы рассуждений, что, как правило, значительно сложнее, чем действия по готовому алгоритму. Поэтому построение новых алгоритмов решения уравнений, описывающих различные классы текстовых задач, всегда расширяет возможности успешного достижения результата.

Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача.

Таня купила тетрадей на 100 р.: в линейку – по цене 5 р. и в клетку – по цене 9 р. Сколько тетрадей каждого вида купила Таня?

Решение:

Обозначим x – количество тетрадей в линейку, а y – количество тетрадей в клетку. Понятно, что количество тетрадей ни отрицательным, ни дробным числом выражаться не могут, и $xy \neq 0$ (хотя бы по одной тетради каждого вида куплено). Следовательно, $x, y \in N$.

Общая стоимость покупки равна $5x + 9y$, что по условию задачи составляет 100 рублей. Получаем уравнение $5x + 9y = 100$. Для ответа на вопрос задачи надо из полученного уравнения найти все натуральные значения неизвестных x и y.

Ранее мы уже решали уравнения с двумя неизвестными – для их решения мы использовали метод перебора и свойства делимости. Так, заметив, что y кратно 5 и не превышает 10, мы легко находим пары чисел, которые обращают наше уравнение в верное равенство: $x = 11$, $y = 5$ и $x = 2$, $y = 10$.

Ответ: Таня купила 16 тетрадей – 11 по 5 р. и 5 по 9 р.; или 12 тетрадей – 2 по 5 р. и 10 по 9 р.

Однако, если с коэффициентами «повезет» меньше, то перебор может содержать сотни, тысячи и вообще сколько угодно случаев. А если неизвестными являются произвольные (не обязательно целые) числа, то перебором такую задачу решить нельзя.

Вместе с тем, уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c – некоторые числа, достаточно часто встречаются при решении текстовых задач, и поэтому нам важно научиться их исследовать и вывести общий способ решения. Но вначале уточним понятия линейного уравнения с двумя неизвестными и его решения.

***Определение* 1. Линейным уравнением с двумя неизвестными x и y** называется уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c – некоторые числа[4].

Числа a и b называются ***коэффициентами при неизвестных*** x и y, а число c – ***свободным членом***.

Придавая переменным x и y различные значения, мы будем получать верные или неверные равенства. Если равенство верное, то пара чисел $(x;\ y)$ является решением данного уравнения, а если неверное – то не является. Например, при $x = 0$ и $y = 0$ уравнение $0{,}5x + y = 1$ преобразуется в неверное равенство $0 = 1$, а при $x = 4$ и $y = -1$ – в верное равенство $1 = 1$. Следовательно, пара чисел $(4;\ -1)$ является решением данного уравнения, а пара чисел $(0;\ 0)$ – не является.

***Определение* 2. Решением** линейного уравнения $ax + by = c$ называется пара чисел $(x;\ y)$, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Заметим, что значения неизвестных x и y в паре для определенности принято указывать в следующем порядке: $(x;\ y)$.

Теперь разберемся в том, сколько решений может иметь линейное уравнение с двумя неизвестными, например, уравнение $0{,}5x + y = 1$. Легко видеть, что, подставляя в данное уравнение произвольные числа x, мы будем получать линейные уравнения с одной переменной y, имеющие единственное решение. Например, если $x = 1$, то $0{,}5 + y = 1$, то есть $y = 0{,}5$. Значит $(1;\ 0{,}5)$ – это решение данного уравнения. Также решениями данного уравнения являются, например, пары чисел $(-2;\ 2)$, $(0;\ 1)$, $(2;\ 0)$ и т.д.

Ясно, что выписать все решения данного уравнения невозможно, так как таких пар бесконечно много. Но, выразив x через y или, наоборот, y через x, общий вид его решения можно записать, соответственно $(x;\ 1 - 0{,}5x)$, где x – любое число или $(2 - 2y;\ y)$, где y – любое число.

По общему решению легко указать любые пары конкретных решений. Так, при $x = 1$ решением является пара $(1;\ 0{,}5)$, при $y = 5$ – пара $(-8;\ 5)$ и т.д.

***Определение* 3. Общим решением** линейного уравнения с двумя неизвестными называется множество всех пар $(x;\ y)$ его решений.

***Определение* 4. Решить** линейное уравнение с двумя неизвестными – значит найти его общее решение.

Во всех рассмотренных случаях коэффициенты a, b и c линейных уравнений с двумя неизвестными были отличны от нуля. Запишем этот случай и остальные возможные случаи в виде таблицы.

Из таблицы мы видим, что линейное уравнение $ax + by = c$ не имеет решения только в одном случае – когда коэффициенты при x и y одновременно равны нулю, а свободный член отличен от нуля ($a = b = 0$, $c \neq 0$). Во всех остальных случаях уравнение

[4] Выражение «уравнение вида» (в данном случае, вида $ax + by = c$) подразумевает все уравнения, которые могут быть представлены в указанном виде с помощью равносильных преобразований.

имеет бесконечное множество решений. Причем если все три коэффициента равны нулю ($a = b = c = 0$), то решением является любая пара чисел.

Коэффициенты			Уравнение	Общее решение
$a \neq 0$	$b \neq 0$	c – любое число	$ax + by = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{b}{a}-y + \frac{c}{a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$	$\left(-\frac{b}{a}y + \frac{c}{a};\ y\right)$, где y – любое число, или $\left(x;\ -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right)$, где x – любое число
$a = 0$	$b \neq 0$	c – любое число	$0x + by = c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$	$\left(x;\ \frac{c}{b}\right)$, где x – любое число
$a \neq 0$	$b = 0$	c – любое число	$ax + 0y = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$	$\left(\frac{c}{a};\ y\right)$, где y – любое число
$a = 0$	$b = 0$	$c = 0$	$0x + 0y = 0$ (истинно)	$(x;\ y)$, где x, y – любые числа
$a = 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$0x + 0y = c$ (ложно)	$\varnothing$

Приведенная выше таблица классифицирует все случаи решения линейных уравнений с двумя неизвестными и помогает вывести удобный на практике алгоритм их решения.

Алгоритм решения линейного уравнения с двумя неизвестными $ax + by = c$

1) Если оба коэффициента при неизвестных не равны нулю ($ab \neq 0$), выразить одно из неизвестных через другое и записать ответ.

2) Если один из коэффициентов при неизвестных равен нулю, а второй – нет ($ab = 0$, но $a \neq 0$ или $b \neq 0$), решить данное линейное уравнение с одним неизвестным и записать ответ.

3) Если оба коэффициента при неизвестных равны нулю ($a = b = 0$), определить, истинно или ложно данное равенство, и записать ответ.

Заметим, что форма всех ответов приведена в таблице.

Пример 1.
Решить уравнение $4x - 3y = 1$.

Решение:

Первый способ:

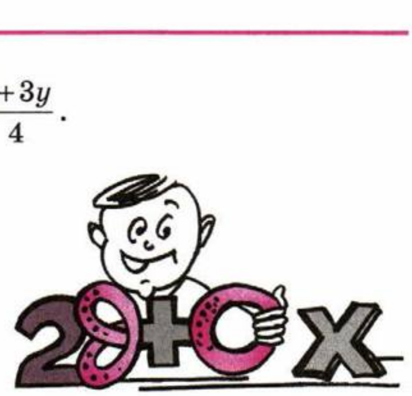
Выразим y через x: $4x - 3y = 1 \Leftrightarrow 3y = 4x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{4x-1}{3}$.

Ответ: $\left(x; \frac{4x-1}{3}\right)$, x – любое число.

Второй способ:

Выразим x через y: $4x - 3y = 1 \Leftrightarrow 4x = 1 + 3y \Leftrightarrow x = \dfrac{1+3y}{4}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1+3y}{4}; y\right)$, y – любое число.



Пример 2.

Решить уравнение $-2x + 0y = -3$.

Решение:

$-2x + 0y = -3 \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

Ответ: $(1{,}5; y)$, y – любое число.

Каждое решение линейного уравнения с двумя неизвестными x и y можно изобразить на координатной плоскости точкой с координатами $(x; y)$. Отметив на координатной плоскости все такие точки, мы получим *график* данного уравнения.

***Определение* 5.** Множество точек координатной плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют уравнению с двумя неизвестными x и y, называется **графиком** этого уравнения.

Что же является графиком линейного уравнения с двумя неизвестными и как его построить?

Если в уравнении $ax + by = c$ коэффициенты при неизвестных одновременно не обращаются в нуль[5], то одно из неизвестных можно выразить через другое. Например, при $b \neq 0$ имеем $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ или $y = kx + d$, где k, d – некоторые числа. Данную зависимость между x и y легко узнать, это хорошо знакомая нам линейная функция. А графиком линейной функции, как известно, является прямая линия.

Отсюда можно сделать важный **вывод:**

> Графиком уравнения $ax + by = c$, где a и b одновременно не обращаются в нуль, является прямая линия.

Данный вывод, в частности, иллюстрирует результат, полученный нами ранее:

> Любое линейное уравнение с двумя неизвестными $ax + by = c$, где a и b одновременно не обращаются в нуль, имеет бесконечно много решений.

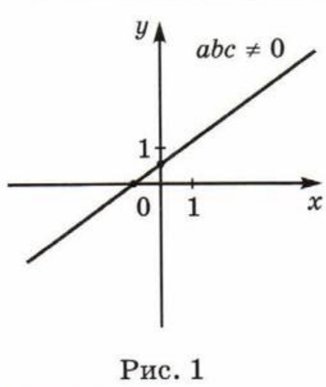


Рис. 1

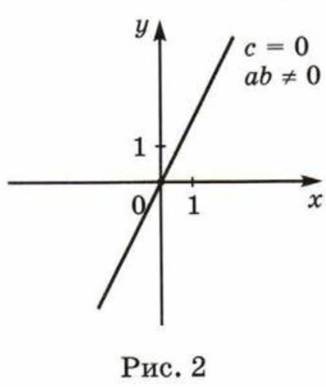


Рис. 2

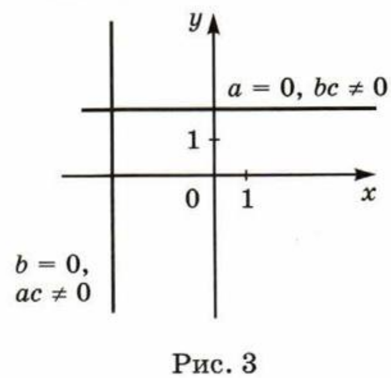


Рис. 3

---

[5] Условие «a и b одновременно не обращаются в нуль» может быть записано в виде неравенства $a^2 + b^2 > 0$.

В зависимости от значений коэффициентов a, b и c расположение прямой, представляющей собой график уравнения $ax + by = c$ на координатной плоскости, может быть различным. Так, при $c = 0$ прямая пройдет через начало координат, при $a = 0$ она будет параллельна оси Ox, а при $b = 0$ – параллельна оси Oy (рис. 1–3).

Если же $a = b = c = 0$, то решением уравнения $0x + 0y = 0$ является любая пара чисел, а графиком уравнения являются все точки координатной плоскости, то есть вся плоскость. А если $a = b = 0$, но $c \neq 0$, то уравнение $0x + 0y = c$ не имеет решений, а его графиком является пустое множество. Поэтому далее мы в основном будем рассматривать лишь случаи, когда a и b одновременно не обращаются в нуль.

Алгоритм построения графика уравнения $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$

1. Выбрать два произвольных значения *одного* неизвестного (например, неизвестного x: x_1 и x_2).
2. Используя уравнение, вычислить соответствующие им значения *другого* неизвестного (y_1 и y_2).
3. Отметить на координатной плоскости точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.
4. Провести через отмеченные точки прямую.

Пример 3.

Построить графики уравнений:

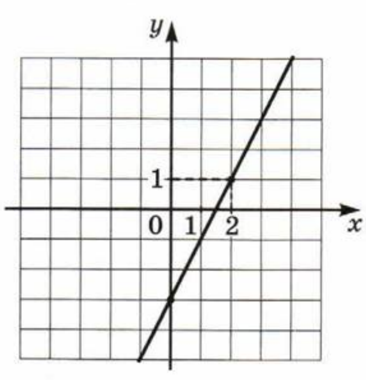
а) $2x - y = 3$; б) $0x + 3y = 6$; в) $-4x + 0y = 4$.

Решение:

Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая. Для каждого уравнения найдем координаты двух точек, принадлежащих графику, отметим их на координатной плоскости и проведем через них прямую линию.

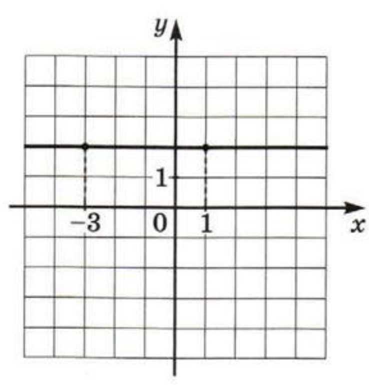
а) $2x - y = 3$

x	0	2
y	−3	1



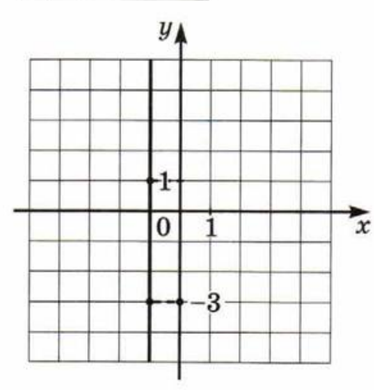
б) $0x + 3y = 6$

x	−3	1
y	2	2



в) $-4x + 0y = 4$

x	−1	−1
y	−3	1



128 Выразите из данной формулы каждую переменную через остальные:

а) $C = an$;

б) $P = 2(a + b)$;

в) $a = bc + r$;

г) $V = abc$.

129 Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
«Задумали два натуральных числа. Если первое число увеличить в 6 раз, второе в 5 раз и сложить полученные значения, то получится число 45. Какие числа задумали?»

1) Какое уравнение было получено при решении задачи? Запишите в общем виде этот тип уравнений.

2) Какие значения могут принимать неизвестные в уравнении данной задачи? Какой метод был использован для решения уравнения данной задачи? Какие свойства делимости позволили сократить перебор?

130 1) Можно ли использовать метод перебора для решения уравнения, если в задаче № 129 будут задуманы рациональные числа? Почему? Как решить полученное в этом случае уравнение?

2) Подставьте в уравнение два произвольных значения x, какие уравнения вы получаете? Вычислите соответствующие значения неизвестного y. Что нужно сделать, чтобы вычислять соответствующее значение неизвестного было удобнее?

3) Предложите свой способ записи решения линейного уравнения с двумя неизвестными и сравните его с понятием общего решения уравнения на стр. 48.

131 Является ли пара чисел $(4; -1)$ решением уравнения:

а) $2x - 3y = 11$; б) $-3x + 5y = 17$?

Запишите по два решения для каждого из этих уравнений.

132 Составьте линейное уравнение с двумя неизвестными со свободным членом, равным твоему:

а) возрасту; б) росту в сантиметрах; в) росту в миллиметрах.

133 Как называются данные уравнения? Найдите общее решение каждого уравнения:

а) $x - 6y = -3$; б) $11x - 2y = 3$; в) $5x + 4y = 9$;

г) $-x + 5y = 0$; д) $4x + 0y = 13$; е) $0x - 3y = 7$.

134 Решите данные уравнения:

а) $\frac{1}{2}x + 2y = 3$; б) $\frac{-x-y}{5} = 0$; в) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3}$;

г) $2x + 3y = 7 + 2x + 3y$; д) $3x + 6y = 1 + 3(x + 2y - \frac{1}{3})$.

135 Какая из точек $A\ (2; 1)$, $B\ (-2; -1)$ и $C\ (0; -2)$ принадлежит графику уравнения $x + 2y = -4$?

136 Постройте график уравнения:

а) $x + y = 3$; б) $x - y - 6 = 0$; в) $6x + 0y = 3$; г) $0x + 5y = -8$.

137 Что является графиком уравнения:

а) $0x + 0y = 0$; б) $0x + 0y = 333$.

138 Переведите условие задачи на математический язык:
а) Автомобиль проехал 1000 км. Часть пути он ехал по трассе со скоростью 120 км/ч, а оставшееся расстояние по городу со скоростью 60 км/ч. Сколько времени он затратил на движение по трассе, а сколько времени на движение по городу?

б) Делая заготовки на зиму, мама сварила 12 литров вишневого компота. У нее были двухлитровые и поллитровые банки. Сколько двухлитровых и поллитровых банок ей потребуется?

в) В каком отношении нужно взять 30%-ный и 5%-ный растворы перекиси водорода, чтобы получить 15%-ный раствор?

Какие из этих задач имеют конечное число ответов?

П **139** Найдите НОД $(a; b)$:

а) $a = 18$, $b = 12$; в) $a = 250$, $b = 725$; д) $a = 4000$, $b = 4608$;

б) $a = 72$, $b = 600$; г) $a = 102$, $b = 63$; е) $a = 46\,080$, $b = 17\,017$.

140 Начертите график прямой пропорциональности $y = 4x$. Пользуясь этим графиком, начертите графики линейных функций $y = 4x + 3$ и $y = 4x - 2$.

Что можно сказать о графиках линейных функций с одинаковыми коэффициентами при x?

Что можно сказать о графиках линейных функций с различными коэффициентами при x?

141 Не выполняя построения, определите, какие из графиков данных линейных функций параллельны, какие пересекаются, а какие совпадают:

а) $y = 7x + 3$; в) $y = -7x + 5$; д) $y = 2 + 3x$; ж) $y = 3 + 7x$;

б) $y = 3x + 7$; г) $y = 7x$; е) $y = 7x - 2$; з) $y = 2x + 3$.

Д **142** Решите уравнения:

а) $-6x + y = 4$; б) $5x + 6y = 1$; в) $7x + 0y = 0$.

143 Постройте графики уравнений:

а) $-5x + 9y = -1$; б) $10x + 11y = -1$; в) $-3x + 0y = 0$.

144 Решите задачу: Кирилл задумал двузначное натуральное число. Если из этого числа вычесть удвоенное число его десятков, то получится 24.

а) Какое число задумал Кирилл?

б) Составьте задачу про задуманные числа, которая будет иметь бесконечное число решений.

145 Не выполняя построения графиков линейных функций, определите, какие из графиков параллельны, какие пересекаются, а какие совпадают:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 1$; в) $y = -x + 5$; г) $y = 1 + x$.

С **146*** Попробуйте изобразить графики следующих нелинейных уравнений:

а) $x^2 - y^2 = 0$; д) $xy = 0$;

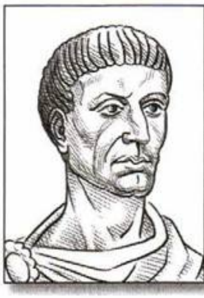
б) $x^2 - 4y^2 = 0$; е) $x^2 + y^2 = 4$;

в) $x^2 + y^2 = 0$; ж) $x^2 + y^2 = 4x$;

г) $x^4 - y^4 = 0$; з) $x^2 + y^2 = 2xy$.

147* Найдите последнюю цифру числа 2^{2011}.

2. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Графическое решение системы



Начало алгебры коренится уже в наблюдении обыкновенных фактов и в потребностях повседневной жизни.

Диофант Александрийский (ок. III в.н.э.),
древнегреческий математик

Для перевода условия задачи на математический язык часто бывает необходимо составить не одно, а несколько уравнений. В этом случае решением задачи будут значения неизвестных, которые обращают в верные равенства все составленные уравнения.

Задача 1.

Таня купила тетрадей на 100 рублей: тетради в линейку по цене 5 р. и тетради в клетку по цене 9 р. Сколько тетрадей каждого вида купила Таня, если известно, что тетрадей в клетку она купила в 5 раз больше?

Решение:

Эта задача отличается от задачи, рассмотренной нами в предыдущем пункте, тем, что в ее условии указывается не одна, а две взаимосвязи между величинами: $5x + 9y = 100$ и $y = 5x$, где x – количество тетрадей в линейку, а y – количество тетрадей в клетку. Для ответа на вопрос задачи нам нужно найти все пары чисел x и y, которые являются решениями обоих уравнений одновременно. В этом случае полученные уравнения называют *системой уравнений* и записывают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} 5x+9y=100 \\ y=5x \end{cases} \quad \to \quad x=?\ y=?$$

Из найденных нами ранее решений первого уравнения $x = 11$, $y = 5$ и $x = 2$, $y = 10$ только последняя пара чисел обращает второе уравнение системы в верное равенство. Поэтому решением системы будет пара (2; 10).

Ответ: Таня купила 2 тетради по 5 рублей и 10 тетрадей по 9 рублей.

Итак, если требуется найти значения неизвестных, которые удовлетворяют сразу нескольким уравнениям, то возникает **система уравнений**. Мы уже встречались с системами уравнений, однако до сих пор не получали общих способов их решения. В данном и следующих пунктах мы познакомимся с методами решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которые существенно расширят наши возможности в решении практических задач.

***Определение* 1. Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y** называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – некоторые числа.

Из приведенного определения следует, что *множеством решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y является множество пар $(x; y)$, которые удовлетворяют каждому из уравнений системы.*

Обозначим множество решений первого уравнения буквой A, а множество решений второго уравнения – B. Множество решений системы этих уравнений составляет пересечение множеств A и B (рис. 1). При этом возможны случаи[6], когда пересечение двух множеств является пустым (рис. 2) или совпадает с каждым из множеств A и B (рис. 3).

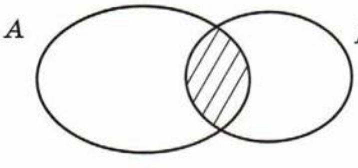


Рис. 1

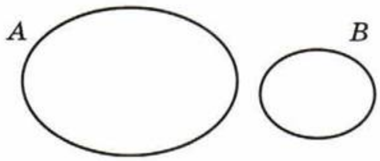


Рис. 2

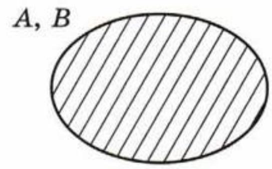


Рис. 3

Графиком линейного уравнения $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 > 0$, является прямая. Следовательно, решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными для указанного случая сводится к нахождению на координатной плоскости общих точек двух прямых линий. А две прямые на плоскости могут: 1) пересекаться, то есть иметь единственную общую точку; 2) быть параллельными, то есть не иметь общих точек; 3) совпадать, то есть иметь бесконечно много общих точек. Значит, система двух линейных уравнений с двумя неизвестными может либо иметь единственное решение, либо вообще не иметь решения, либо иметь бесконечное множество решений.

* * *

Если рассматривать системы из линейных уравнений, в которых хотя бы в одном уравнении коэффициенты при неизвестных одновременно равны нулю, то следует проанализировать взаимное расположение таких графиков линейных уравнений, как пустое множество и вся плоскость целиком.

Если графиком одного уравнения является пустое множество, то и пересечение с этим пустым множеством будет пусто, т.е. система не будет иметь решений. Если графиком одного уравнения является вся плоскость, то решение всей системы будет совпадать с решением другого уравнения системы.

Чтобы найти эти множества решений, можно построить графики соответствующих уравнений системы.

Пример 1.
Решить систему $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 7x-y=-6 \end{cases}$.

Решение:

Начертим графики каждого из уравнений системы в одной координатной плоскости.

$2x - 3y = 1$;

x	0	2
y	$-\dfrac{1}{3}$	1

$7x - y = -6$

x	-1	$-\dfrac{6}{7}$
y	-1	0

Рис. 4

[6] Будем считать, что среди этих уравнений нет уравнения вида $0x + 0y = 0$.

По рисунку 4 видно, что общая точка этих прямых имеет координаты (−1; −1).

Пара чисел (−1; −1) будет решением системы, потому что эта точка принадлежит графикам обоих уравнений системы, значит, удовлетворяет обоим уравнениям.

Однако найденный нами результат зависит от точности выполнения чертежа. Мы лишь можем утверждать, что приближенным решением системы является точка (−1; −1) на плоскости; возможно, ее координаты (−0,98; −1,02). Поэтому найденная пара чисел требует дополнительной проверки. Ее можно провести, подставив полученную пару чисел (−1; −1) в каждое уравнение системы.

Получаем верные равенства:

$2\cdot(-1)-3\cdot(-1)=1,\qquad 7\cdot(-1)-(-1)=-6.$

Значит, пара чисел (−1; −1) действительно является решением системы.

Ответ: система имеет единственное решение (−1; −1).

Необходимость такой проверки подкрепляется следующим примером.

Пример 2.

Решить систему $\begin{cases} x-y=1 \\ 5x+7y=6 \end{cases}$.

Начертим графики каждого из уравнений системы в одной координатной плоскости.

$x-y=1;$

x	0	2
y	−1	1

$5x+7y=6$

x	−3	4
y	3	−2

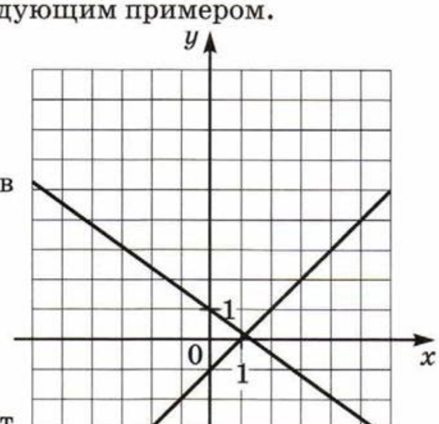


Рис. 5

На рисунке 5 точка пересечения прямых выглядит как точка с координатами (1;0). Более того, пара чисел (1;0) является решением первого уравнения системы. Но она не является решением второго уравнения, так как $5\cdot1+7\cdot0\neq6$. В действительности решением системы уравнений является пара чисел $\left(\frac{13}{12};\frac{1}{12}\right)$. А точка с координатами $\left(\frac{13}{12};\frac{1}{12}\right)$ на рисунке сливается с точкой, имеющей координаты (1;0).

Пример 3.

Решить систему $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$.

Решение:

Для построения прямых вычислим координаты точек их пересечения с осями.

Для обеих прямых эти точки (3; 0) и $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ – одинаковы. Через эти точки можно провести только одну прямую – графики совпали (рис. 6). Значит, все решения первого уравнения будут являться решениями второго уравнения, и наоборот.

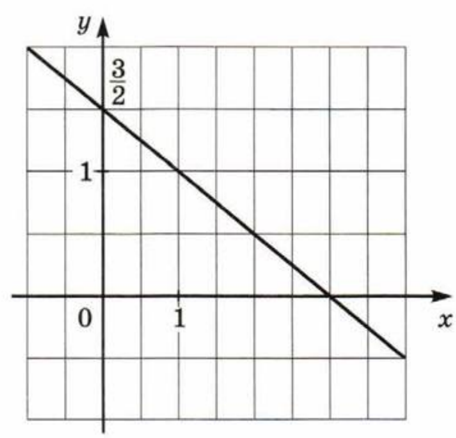


Рис. 6

В ответ запишем общее решение одного из уравнений системы, например, первого.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $(3-2y;\ y)$, y – любое число.

Пример 4.

Решить систему $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 6x-9y=10 \end{cases}$.

Решение:

Построив на координатной плоскости прямые $2x-3y=7$ и $6x-9y=10$, мы видим, что они не пересекаются (рис. 7). Вместе с тем, опираясь только на график, *абсолютно точно* утверждать этого нельзя; можно лишь предполагать, что прямые, скорее всего, параллельны.

Однако не исключено, что они пересекаются в очень далекой точке. Поэтому, чтобы обосновать их параллельность, нужно проводить дополнительные рассуждения.

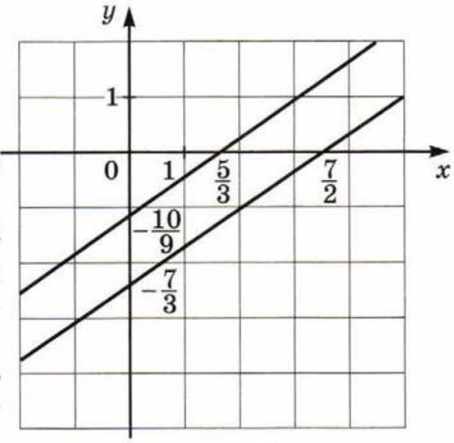


Рис. 7

Перепишем уравнения в виде $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$ и $y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{9}$. Если бы графики уравнений имели общую точку, то для *ложного* равенства $\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}x-\frac{10}{9}$ нашлось бы решение. Значит, прямые действительно параллельны и система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Обобщая найденные способы решений заданных систем, мы можем вывести следующий *алгоритм графического решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными* для случая, когда оба коэффициента при неизвестных каждого уравнения одновременно не равны нулю.

Алгоритм графического решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными

1) Построить графики каждого уравнения в одной координатной плоскости.

2) Если прямые параллельны, нужно записать, что система не имеет решения.

3) Если прямые совпадают, нужно записать в ответ общее решение одного из уравнений.

4) Если прямые пересекаются, нужно найти координаты точки пересечения, сделать проверку и записать их в ответ.

* * *

Решение при помощи графического метода может стать точным, если привлечь некоторые дополнительные соображения, например, делимость.

Рассмотрим, например, график функции $y=\frac{p}{q}x$, где p – целое, q – натуральное, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь (рис. 8). Заметим, что график функции проходит через точку (0; 0). Через какие целочисленные точки еще проходит график? (*Целочисленной* называют точку, у которой обе координаты целые).

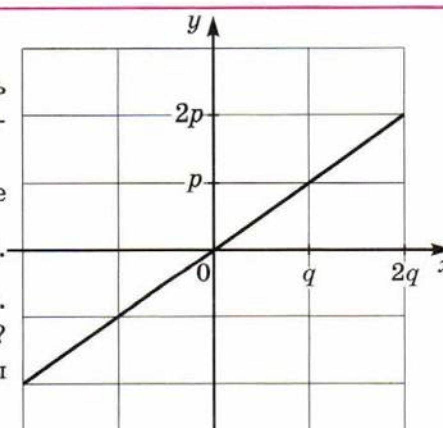


Рис. 8

Пусть $m=\frac{p}{q}n$, где m и n – целые. Так как p и q взаимно просты, то n нацело делится на q. То есть $n=qt$, где t –

целое, и тогда $m=\frac{p}{q}n=\frac{p}{q}qt=pt$. Это означает, что все целочисленные точки графика функции $y=\frac{p}{q}x$ имеют вид $(qt;\ pt)$, где t – целое. В частности, кроме точки (0; 0) график проходит через точки $(q;\ p)$, $(-q;\ -p)$, $(2q;\ 2p)$ и т.д. (рис. 8)

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

***Теорема* 1.** Пусть график функции $y=\frac{p}{q}x+r$, где p – целое, q – натуральное, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь, r – рациональное число, проходит через целочисленную точку $(x_0;\ y_0)$. Тогда все целочисленные точки этого графика имеют вид $(x_0+qt;\ y_0+pt)$, где t – целое.

Пример 5.

Решить систему $\begin{cases}3x-4y=0\\x+y=7\end{cases}$.

Решение:

Перепишем систему в виде $\begin{cases}y=\frac{3}{4}x\\y=-x+7\end{cases}$.

Прямые не параллельны (и не совпадают). Значит, система имеет единственное решение.

Рассмотрим прямую $y=\frac{3}{4}x$. Она проходит через точку (0; 0), коэффициент при x равен $\frac{3}{4}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(4t;\ 3t)$, где t – целое.

Теперь рассмотрим прямую $y=7-x=7-\frac{1}{1}\cdot x$. Прямая проходит через точку (0; 7), коэффициент при x равен $-\frac{1}{1}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(0+t;\ 7-t)$, где t – целое.

Таким образом, можно заметить, что первая прямая проходит через точки (0; 0), (4; 3), (8; 6) и т.д., а вторая прямая – через точки (0; 7), (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2) и т.д. Следовательно, обе прямые проходят через точку (4; 3) (рис. 9).

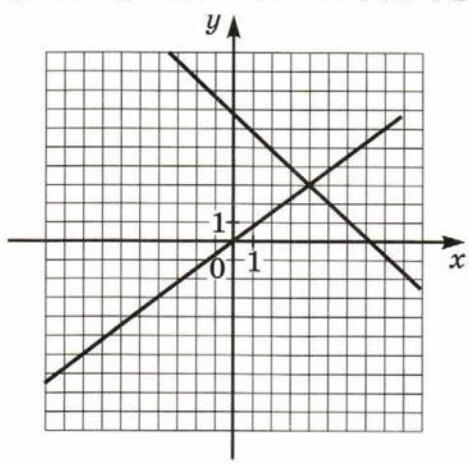


Рис. 9

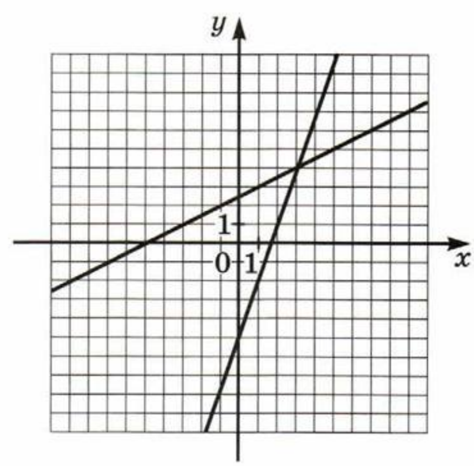


Рис. 10

Так как решение системы единственно, то ответ: (4; 3). Заметим, что данное утверждение мы доказали **строго**, используя свойства делимости.

Ответ: (4; 3).

Пример 6.

Решить систему $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ 3x-y-5=0 \end{cases}$.

Решение:

Перепишем систему в виде $\begin{cases} y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2} \\ y=3x-5 \end{cases}$.

Прямые не параллельны (и не совпадают). Значит, система имеет единственное решение.

Рассмотрим прямую $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$. Она проходит через точку (1; 3). Коэффициент при x равен $\dfrac{1}{2}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(1 + 2t; 3 + t)$, где t – целое.

Рассмотрим прямую $y=3x-5=\dfrac{3}{1}\cdot x-5$. Прямая проходит через точку (0; – 5). Коэффициент при x равен $\dfrac{3}{1}$. Значит, она проходит через все целочисленные точки вида $(0 + t; -5 + 3t)$, где t – целое.

Таким образом можно заметить, что первая прямая проходит через точки (1; 3), (3; 4), (5; 5) и т.д., а вторая прямая – через точки (0; –5), (1; –2), (2; 1), (3, 4) и т.д. То есть обе прямые проходят через точку (3; 4) (рис. 10). А так как решение системы единственно, то это и есть ответ.

Ответ: (3; 4).

К **148** Начертите графики линейных уравнений:

а) $x - 2y = 4$; б) $0,5x + y = 6$.

Запишите координаты общей точки построенных графиков.

149 Является ли пара чисел (0,5; –3,5) решением системы:

а) $\begin{cases} x+y=-3 \\ 4x-2y=9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=4,5 \\ x-y=3 \end{cases}$.

150 Найдите решение системы линейных уравнений:

$\begin{cases} x-2y=4 \\ 0,5x+y=6 \end{cases}$.

а) Как графики уравнений могут помочь в решении этой системы?
б) Можно ли утверждать, что найденное при помощи графиков решение является точным? Как можно выполнить проверку найденного результата?
в) Вспомните, как могут располагаться прямые на плоскости. Подойдет ли способ, который вы использовали при решении этой системы, для решения всех систем? Сравните свои предположения с алгоритмом, приведенным на стр. 57.

151 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases} 2x+3y=-14 \\ x-2y=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x-3y=5,5 \\ x+y=0,5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-4y=5 \\ x-2y=2,5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 6x+9y=18 \end{cases}$.

152 Решите систему графическим способом:

$\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$.

Удалось ли найти точное решение системы? Какие недостатки графического способа вы видите?

153 Найдите несколько *целочисленных точек* графика уравнения $x - 2y = 6$ методом проб и ошибок. Как можно найти их, используя свойства делимости?

154 Как можно применить теорему о целочисленных точках графика уравнения для решения систем? Решите систему, используя эту теорему:

а) $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ x + y = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$.

П **155** Саша составил линейное уравнение с двумя неизвестными $1999x + 12y = 3$. Коэффициент при x был равен году его рождения, коэффициент при y был равен порядковому номеру месяца его рождения, а свободный член являлся числом дня рождения. Назовите дату его рождения.

156 Определите знак значения выражения:

а) $(-13)^{111}$; б) $\left(-\frac{7}{9}\right)^{516}$; в) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{999} : (-9{,}75)^{111} : (-39{,}7)^{101}$.

157 Найдите значение выражения $(9a - 4c)(3a - 7c) - (4a + 3c)(2a + 9c)$ при $a = 1$, $c = -1$.

158 Напишите несколько линейных функций, графики которых:

а) параллельны графику функции $y = 3x + 1$;

б) пересекаются с графиком функции $y = x - 3$.

Что можно сказать о графиках функций $y = 4x + 1$ и $y = 1 + 4x$?

159 Постройте график $y = 2x - 3$ и определите по графику, как изменяется значение функции y, когда:

а) x изменяется от 0 до 3;

б) x изменяется от -2 до 0;

в) x изменяется от -3 до 1;

г) x изменяется от 2 до 5;

д) x равен 0.

Д **160** Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0{,}2x + y = 5 \\ x + 5y = 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

161 Составьте линейное уравнение с двумя неизвестными, так, чтобы коэффициент при x был равен числу твоего дня рождения, коэффициент при y был равен порядковому номеру месяца твоего рождения, а свободный член являлся годом твоего рождения.

162 Определите знак значения выражения:

а) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{400}$; б) $22^{44} : (-38{,}12)^{33}$; в) $(-7{,}7)^{531} \cdot (-1{,}21)^{500}$.

163 Найдите значение выражения $(5 + 3b)(5b - 7) - (4 - 3b)(4b - 3)$ при $b = 2$.

С **164*** Может ли произведение двух чисел быть меньше наименьшего из сомножителей?

3.* Количество решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Не представляю себе, как можно довольствоваться знаниями, полученными из вторых рук; хотя чужое знание может нас кое-чему научить, мудр бываешь лишь своей собственной мудростью.

Мишель де Монтень (1533–1592),
французский писатель и философ

При решении задач иногда бывает необходимо уметь определять количество решений системы в ситуации, когда графический способ неудобен или даже неприемлем. Рассмотрим, например, задачу 1.

Задача 1.
Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 1000x+y=0{,}001 \\ x+0{,}001y=1000 \end{cases}$?

Для построения точных графиков уравнений этой системы нам потребовался бы лист бумаги с размерами в несколько десятков километров, что, очевидно, невозможно. В данном пункте мы узнаем, как можно решать подобные задачи, выполняя лишь арифметические действия.

Рассмотрим вначале случай ***ненулевых коэффициентов*** в уравнениях системы. Нам нужно, по сути, определить необходимые и достаточные условия, при которых две прямые на плоскости $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$: 1) пересекаются в одной точке; 2) параллельны; 3) совпадают.

Воспользуемся для этого свойствами линейной функции. Запишем уравнения системы в виде, удобном для применения известных нам правил:

$$a_1x+b_1y=c_1 \Leftrightarrow y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \Leftrightarrow y=k_1x+d_1,$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \Leftrightarrow y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2} \Leftrightarrow y=k_2x+d_2,$$

где $k_1=-\frac{a_1}{b_1}$, $k_2=-\frac{a_2}{b_2}$, $d_1=\frac{c_1}{b_1}$, $d_2=\frac{c_2}{b_2}$ $(b_1\neq 0, b_2\neq 0)$.

Мы знаем, что прямые $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$ пересекаются при $k_1 \neq k_2$, параллельны при $k_1 = k_2$, $d_1 \neq d_2$, совпадают при $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$. Возвращаясь к системе двух линейных уравнений, данные условия можно записать в виде:

$$k_1=k_2 \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

Аналогичные преобразования можно выполнить для неравенств $k_1 \neq k_2$, $d_1 \neq d_2$.

Таким образом, взаимное расположение графиков уравнений $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ определяется пропорциональностью их коэффициентов. Значит, этим же определяется и количество решений системы.

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ с ненулевыми коэффициентами:

- имеет ***единственное*** решение, если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$,
- ***не имеет*** решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$,
- имеет ***бесконечно много*** решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Отсюда мы можем сформулировать общее правило определения количества решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

Система двух линейных уравнений с ненулевыми коэффициентами:

- имеет ***единственное*** решение тогда и только тогда, когда коэффициенты при x не пропорциональны соответствующим коэффициентам при y;
- ***не имеет*** решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y пропорциональны друг другу, но не пропорциональны свободным членам;
- имеет ***бесконечно много*** решений тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y пропорциональны друг другу и свободным членам.

Пример 1.

Выяснить количество решений каждой из систем:

а) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 6x-9y=10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 7x-y=-6 \end{cases}$.

Решение:

а) $\dfrac{2}{6} = \dfrac{-3}{-9} \neq \dfrac{7}{10}$ *Ответ:* система не имеет решений.

б) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9}$ *Ответ:* система имеет бесконечное множество решений.

в) $\dfrac{2}{7} \neq \dfrac{-3}{-1}$ *Ответ:* система имеет единственное решение.

Теперь мы можем вернуться к задаче 1 о количестве решений системы $\begin{cases} 1000x+y=0{,}001 \\ x+0{,}001y=1000 \end{cases}$. Воспользуемся построенным правилом:

$$\frac{1000}{1} = \frac{1}{0{,}001} \neq \frac{0{,}001}{1000},$$

следовательно, система не имеет решений.

Ответ: нет решения.

* * *

Теперь найдем условия, определяющие количество решений системы для случая, когда в ней ***имеются нулевые коэффициенты при неизвестном, но в каждом уравнении не более одного***. В этом случае возможно несколько вариантов.

1. В одном из уравнений системы есть нулевой коэффициент, а в другом – нет.

Нулевой коэффициент означает, что график уравнения параллелен одной из осей координат (или совпадает с ней), а отсутствие нулевого коэффициента – что график уравнения не параллелен ни одной из осей. Значит, графики уравнений – это пересекающиеся прямые, и поэтому система уравнений имеет *единственное решение* (рис. 1).

2. Нулевой коэффициент имеется в обоих уравнениях системы, но при разных неизвестных.

Это означает, что график одного из уравнений параллелен оси x, а график другого – оси y. Следовательно, здесь опять графики уравнений пересекаются, и система уравнений имеет *единственное решение* (рис. 2).

3. Нулевой коэффициент имеется в обоих уравнениях системы при одном и том же неизвестном.

В этом случае графики обоих уравнений параллельны одной и той же оси координат. Значит, если ненулевые коэффициенты уравнений пропорциональны свободным членам, прямые совпадают, и система имеет *бесконечное множество* решений. В противном случае графики уравнений параллельны, и система *не имеет* решений (рис. 3).

Разные варианты решения можно проиллюстрировать на рис. 1–3.

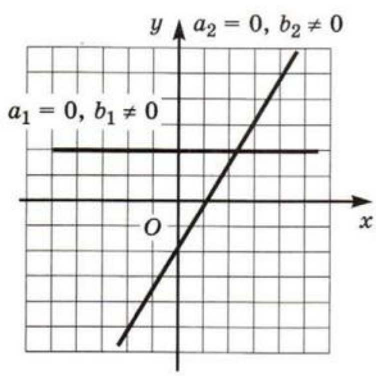


Рис. 1

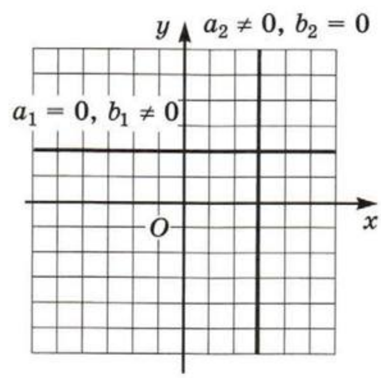


Рис. 2

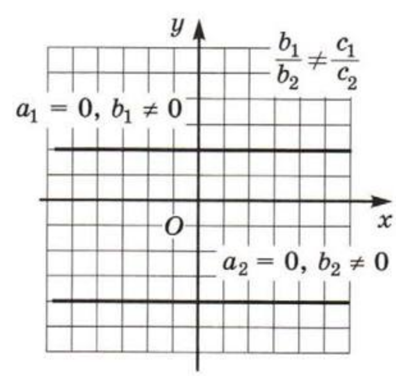


Рис. 3

Итак:

Система двух линейных уравнений, содержащая нулевые коэффициенты при неизвестных (не более одного в каждом уравнении):

- имеет ***единственное*** решение тогда и только тогда, когда в ней нет нулевых коэффициентов при одном и том же неизвестном;
- имеет ***бесконечное множество*** решений тогда и только тогда, когда в ней есть нулевые коэффициенты при одном и том же неизвестном, а ненулевые коэффициенты пропорциональны свободным членам;
- ***не имеет*** решений тогда и только тогда, когда в ней есть нулевые коэффициенты при одном и том же неизвестном, а ненулевые коэффициенты не пропорциональны свободным членам.

И, наконец, если хотя бы одно из уравнений системы содержит ***нули при обоих неизвестных***, то система может не иметь решений либо иметь бесконечное множество решений (прямая, плоскость).

Попробуйте понять, почему это так, опираясь на рассуждения, проведенные нами в п. 2.1.2, и закончите исследование самостоятельно.

Пример 2.

Выяснить, при каких значениях a система $\begin{cases} ax - y = a \\ -x + ay = -1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Решение:

Система двух линейных уравнений может иметь бесконечное число решений, если:

1) хотя бы одно из ее уравнений имеет нули при обоих неизвестных;

2) нулевой коэффициент расположен в каждом уравнении при одном и том же неизвестном;

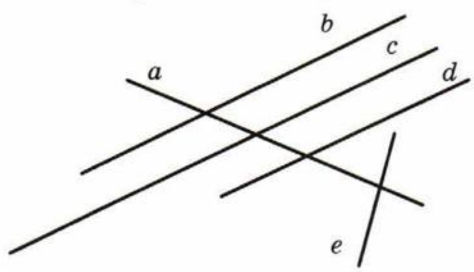
3) коэффициенты в системе отличны от нуля и пропорциональны.

Поскольку первые два условия не выполняются, то нам остается рассмотреть третий случай. На математическом языке данное условие можно записать так:

$$\frac{a}{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 1 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений при $a \in \{-1; 1\}$.

К **165** На какие группы можно разбить эти прямые?



Сколько общих точек могут иметь две прямые на плоскости?

166 а) Графики линейных функций $y = 2x + 3$ и $y = kx - 4$ параллельны. Чему равен коэффициент k?

б) Графики линейных функций $y = 2x + 3$ и $y = kx + b$ совпадают. Каковы значения k и b?

в) Графики линейных функций $y = -7x + 1$ и $y = kx - 4$ пересекаются. Чему может быть равен коэффициент k?

167 1) Постройте графики уравнений системы и ответьте, сколько решений имеет система:

$$\begin{cases} 4x - y = 4 \\ 12x + y = 6 \end{cases}.$$

Можно ли было выяснить, сколько решений имеет система, не выполняя построений?

2) Вспомните, от чего зависит расположение графиков линейных функций. Как это может помочь определить количество решений системы?

3) Постройте правило определения количества решений систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными и сопоставьте его с правилом на стр. 62.

168 Выясните, сколько решений имеют данные системы:

а) $\begin{cases} 4x - 6y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - 3y = 0,5 \\ -2x + 3y = -\frac{1}{2} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 5x - 10y = 2 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 3x + 0,75y = 7 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$; е) $\begin{cases} -x - 8y = 1 \\ x + 8y = -1 \end{cases}$.

169 Для каждой системы выясните, при каких значениях параметра a она не имеет решений, а при каких имеет бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+ay=1 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} ax+ay=a^2 \\ x+ay=2 \end{cases}$;   в*) $\begin{cases} ax-ay=ab \\ 2ax-y=a \end{cases}$.

П **170** Представьте периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(4);   б) 1,(25);   в) – 0,8(1);   г) 345,1(76).

171 Найдите НОК (a; b):

а) $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$;   б) $a = 2121$; $b = 777$.

172 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $\dfrac{(4a)^{12} \cdot a^{11} \cdot a^{25} \cdot a^{32} \cdot (a^2)^6}{4^{13} \cdot a^{14} \cdot (a^{54} : a^{27}) \cdot a^{23} \cdot a^{26}}$ при $a = 2$;

б) $\dfrac{5^{49} \cdot (b^{79} : b^{34}) \cdot c^{23} \cdot c^{36} \cdot (bc)^{29}}{b^4 \cdot c^{43} \cdot (c^{29} : c^{17}) \cdot (c^2)^{11} \cdot c^{10} \cdot (5b)^{48} \cdot b^{21}}$ при $b = 5$, $c = 3$.

Д **173** Выясните, сколько решений имеют данные системы:

а) $\begin{cases} 4x+12y=1 \\ 6x+9y=1 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 6x-9y=-3 \\ -4x+6y=2 \end{cases}$;   в) $\begin{cases} 4x+6y=2 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

174 Выясните, при каких значениях параметра a система не имеет решений, а при каких имеет бесконечно много решений:

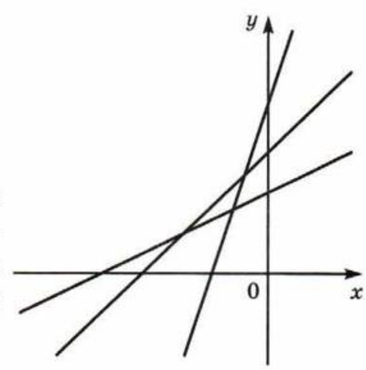
$\begin{cases} ax+y=a^3 \\ x+ay=1 \end{cases}$.

175 Представьте периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(6);   б) −1,(15).

176 Найдите значение выражения $\dfrac{a^{21} \cdot a^{35} \cdot a^{42} \cdot (a^2)^6 \cdot (3a)^{12}}{3^{10} \cdot a^{24} \cdot (a^{57} : a^{29}) \cdot a^{33} \cdot a^{36}}$ при $a = 9$.

С **177*** Графики трех линейных функций расположены так, как показано на рисунке. Существуют ли такие числа a, b и c, что одна из этих функций задается формулой $y = ax + b$, другая – формулой $y = bx + c$, а третья – формулой $y = cx + a$?



178* Для каждой системы выясните, при каких значениях параметров она имеет ровно одно решение и найдите это решение:

а) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=2 \\ x+4y=a \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+4y=2 \\ bx+4y=2 \end{cases}$;   в) $\begin{cases} ax+by=a \\ (a-2)x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$.

4. Алгебраические методы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными: способ подстановки и способ сложения

Люди, которые имеют много дела с математикой, в конце концов приобретают чувство математического изящества используемых приемов, они становятся способными чувствовать математическую красоту теорий.

Поль Адриен Морис Дира́к (1902–1984),
английский физик-теоретик

В предыдущих пунктах мы видели, что графический метод решения систем линейных уравнений, обладая важнейшим качеством наглядности, оказывается при этом недостаточно точным и надежным для определения количества решений системы. Часто непригоден он и для самого решения систем: например, мы не сможем найти на координатной плоскости точку пересечения прямых, имеющую координаты (1 000 000; –0,01). Поэтому для практического решения задач важно иметь алгебраические методы, позволяющие посредством вычислений быстро и точно находить множество решений систем уравнений.

Вернемся к рассмотренной в пункте 2.1.2 задаче, которая привела нас к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x+9y=100 \\ y=5x \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы следует, что ее решениями являются лишь пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие условию $y = 5x$. Поэтому, подставив в первое уравнение вместо y выражение $5x$, мы получим равносильную систему уравнений, так как множество ее решений не изменится. Однако теперь первое уравнение преобразовалось к линейному уравнению с одним неизвестным, из которого мы легко найдем x. А «подставив» полученное значение x во второе уравнение, найдем искомое значение y:

$$\begin{cases} 5x+9y=100 \\ y=5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+9\cdot 5x=100 \\ y=5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x=100 \\ y=5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}$$

Ответ: (2; 10).

Таким образом, процесс решения системы свелся к последовательной ее замене на равносильные системы все более простого вида. Для этого достаточно в одном из уравнений выразить одно неизвестное через другое и *подставить* во второе уравнение. Поэтому полученный способ решения систем получил название **способа подстановки.**

Уточним понятие *равносильности* систем уравнений и запишем в общем виде полученный алгоритм их решения.

***Определение* 1**. Две системы уравнений называются **равносильными**, если множества их решений совпадают.

Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными способом подстановки

1. В одном из уравнений выразить одно неизвестное через другое.
2. Подставить вместо этого неизвестного полученное выражение в другое уравнение системы.
3. Решить полученное во втором пункте уравнение с одним неизвестным.
4. Воспользовавшись найденным значением одного неизвестного, вычислить значение второго неизвестного.
5. Записать ответ.

Пример 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}4\,x-\dfrac{1}{3}y=1 \\ 1\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases}.$$

Решение:

Выразим значение x из первого уравнения системы, подставим полученное выражение во второе уравнение, а затем поэтапно найдем искомые значения x и y:

$$\begin{cases} 0{,}4x-\dfrac{1}{3}y=1 \\ 1\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\left(\dfrac{1}{3}y+1\right):0{,}4 \\ 1\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}y+2\dfrac{1}{2} \\ 1\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}y+2\dfrac{1}{2} \\ 1\dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{5}{6}y+2\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}y+2\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{5}{6}y+\dfrac{8}{5}\cdot\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}y+2\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{3}y+4+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}y+2\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{3}y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{6}\cdot(-0{,}6)+2{,}5 \\ y=-0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0{,}6 \end{cases}$$

Ответ: $(2;\,-0{,}6)$.

Как мы видим, при решении данной системы уравнений способ подстановки хотя и позволил найти однозначный ответ, но потребовал громоздких преобразований. Естественно, что при решении задач и уравнений мы стремимся максимально упростить свои действия. В данном случае это возможно, если заметить, что коэффициенты при y в исходных уравнениях являются противоположными числами, и вспомнить известные нам свойства чисел.

Так, мы знаем, что если обе части равенства увеличить или уменьшить на одно и то же число, то равенство сохранится. Значит, равенства можно складывать и вычитать.

Опираясь на эти свойства, несложно догадаться, как при решении приведенной выше системы можно более удобно перейти от уравнения с двумя неизвестными к уравнению с одним неизвестным: надо просто сложить оба уравнения. Сумма противоположных слагаемых, содержащих y, будет равна нулю. Дальнейшее решение системы будет точно таким же, как и в предыдущем случае, но при этом весь путь преобразований окажется значительно короче, а именно:

$$\begin{cases} 0,4x\underline{-\dfrac{1}{3}y}=1 \\ 1\dfrac{3}{5}x\underline{+\dfrac{1}{3}y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x+1,6x=1+3 \\ 1,6x+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ 1,6x+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 1,6\cdot 2+\dfrac{1}{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,6 \end{cases}$$

Приведенный способ решения систем называется **способом алгебраического сложения.** Речь здесь идет именно об *алгебраической* сумме, так как тот же самый способ можно применять и тогда, когда оба уравнения имеют равные слагаемые. В этом случае перейти к уравнению с одним неизвестным можно, вычитая из одного уравнения другое.

Конечно, далеко не всегда так «везет», что в уравнениях системы есть равные или противоположные слагаемые. Но довольно часто их можно привести к этому, умножая или деля одно, или даже оба уравнения на некоторое число, отличное от нуля.

Как мы видели, в *алгоритме решения систем линейных уравнений способом алгебраического сложения* меняются лишь первые два шага предыдущего алгоритма.

Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными способом алгебраического сложения

1. Умножить или разделить одно (или оба) уравнения системы на некоторое число, не равное 0, так, чтобы коэффициенты при одном из неизвестных в обоих уравнениях стали противоположными числами (или совпали).

2. Сложить (вычесть) уравнения.

3. Решить полученное во втором пункте уравнение с одним неизвестным.

4. Воспользовавшись найденным значением одного неизвестного, вычислить значение второго неизвестного.

5. Записать ответ.

Пример 2.

Решить систему: $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$.

Решение:

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 2 и вычтем из первого уравнения второе.

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{6x}+9y=3 \\ \underline{6x}+4y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=3 \\ 5y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=3 \\ y=-2,6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9\cdot(-2,6)=3 \\ y=-2,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4,4 \\ y=-2,6 \end{cases}$$

Ответ: (4,4; −2,6).

Итак, при решении систем линейных уравнений можно использовать следующие **равносильные преобразования систем:**

1) заменить одно из уравнений системы на равносильное ему уравнение;

2) заменить в одном из уравнений системы одно неизвестное на его выражение через другое неизвестное, полученное из второго уравнения системы;

3) заменить одно из уравнений системы на его алгебраическую сумму с другим уравнением системы.

Какое из равносильных преобразований выбрать в каждом конкретном случае, зависит от вида системы. Конечно, желательно выбирать способ, который сократил бы усилия, предпринятые для получения ответа.

До сих пор мы рассматривали системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, имеющие единственное решение. Но, как мы уже знаем, данные системы могут вообще не иметь решений либо иметь бесконечно много решений. Рассмотренные способы решения систем «работают» и в этих случаях.

Пример 3.

Решить систему $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 12x-18y=20 \end{cases}$.

Решение:

Домножим первое уравнение на 6 и вычтем из второго. Система заменится на равносильную:

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 12x-18y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ 12x-18y-6(2x-3y)=20-6\cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ 12x-18y-12x+18y=-22 \end{cases}.$$

Второе уравнение можно преобразовать к неверному числовому равенству $0 = -22$. Так как последнее уравнение не имеет решения, значит, система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 4.

Решить систему $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$.

Решение:

Разделим первое уравнение на 2, а второе – на 3. Получим равносильную систему, уравнения которой совпадают. Значит, исходная система равносильна каждому из данных уравнений:

$$\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow x+2y=3$$

Следовательно, система имеет бесконечно много решений, где общее решение можно записать в виде $(3 - 2y; y)$, y – любое число.

Ответ: $(3 - 2y; y)$, y – любое число.

К **179** Найдите значение выражения $(d + 3^2 - 3^{111})^2 - 9^2$ при $d = 3^{111}$.

180 1) Можно ли решить данную систему, используя графики:

$$\begin{cases} x+200y=70 \\ 2x-10y=99? \end{cases}$$

2) Найдите другой способ решения этой системы. Для этого выразите неизвестное x из первого уравнения. Как можно использовать полученное равенство при решении системы?

3) Используя идею решения этой системы, составьте алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными новым способом и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 67.

181 1) Решите систему способом подстановки:

а) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x - 3y = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3a + 5b = 8 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3m - 2n = 5 \\ 2m - n = 2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$.

В каких системах удобно использовать способ подстановки?

2) Найдите другой способ решения последней системы. Сравните коэффициенты при одинаковых неизвестных, что интересного вы заметили? Как можно использовать метод «весов» для решения этой системы?

3) Используя идею решения этой системы, составьте еще один алгоритм решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными. Сопоставьте построенный алгоритм с алгоритмом на стр. 68.

182 Решите следующие системы способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -5x - 4y = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = -5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$.

183 Найдите решение системы:

а) $\begin{cases} 1{,}2x - 2(y + 1) = y - 2 \\ 2(x + y) = 0{,}5y - 13 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4(3x + 4y) + 16 = 3(5x + 2y) \\ 15x + 2(2y - 3) = 20 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} -\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{5} = 0{,}2 \\ -\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1\dfrac{2}{3} \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{5} = 1 \\ \dfrac{x - 5}{3} - \dfrac{2 - y}{2} = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$.

184 Вычислите координаты точки пересечения графиков уравнений:

а) $3x - y = 7$ и $5x - 2y = 1$; б) $7x + 6y = 10$ и $3x + 5y = -3$.

185 Задайте формулой линейную функцию, график которой:

а) проходит через точки (2; 2) и (1; − 1);

б) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 4, а ось ординат в точке с ординатой 2.

186 Решите системы, используя подходящую замену неизвестных:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = 3 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 8 \\ \dfrac{2}{9x} - \dfrac{1}{3y} = 2 \end{cases}$; в*) $\begin{cases} \dfrac{4}{x + y} + \dfrac{3}{x - y} = 5 \\ \dfrac{2}{x + y} + \dfrac{9}{y - x} = -1 \end{cases}$.

П **187** Найдите остаток от деления 123 456 789 на 11.

188 Сколько различных простых делителей у числа 2772?

189 Найдите НОД (a; b):

а) $a = 2^2 \cdot 503^{12} \cdot 7^4$, $b = 2^4 \cdot 503 \cdot 13^3$; б) $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Д **190** Решите систему способом подстановки и способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -4x - 6y = -1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 4x + 6y = -5 \end{cases}$.

191 Решите систему:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+y=3 \\ \dfrac{3}{2x}-2y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \end{cases}$.

192 Найдите НОД $(a; b)$:

а) $a = 2^3 \cdot 17 \cdot 431$, $b = 2 \cdot 17^2 \cdot 43$; б) $a = 2^5 \cdot 7 \cdot 31$, $b = 2 \cdot 7^2 \cdot 31^3$.

С **193*** На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов – за пять дней. За сколько дней озеро сможет выпить один слон?

194* Решите рациональным способом систему:

$$\begin{cases} 6751x+3249y=26\,751 \\ 3249x+6751y=23\,249 \end{cases}.$$

195* За книгу заплатили 100 руб. и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга?

196* Найдите все целочисленные решения уравнения $121x - 49y = 1$.

197* Покупатель выбрал товар стоимостью 200 рублей и дал продавцу тысячерублевую купюру. У продавца не оказалось сдачи, он пошел в соседний отдел и разменял эту купюру. Потом он отдал покупателю товар и сдачу. Покупатель ушел. Продавец из соседнего отдела обнаружил, что купюра фальшивая, и принес ее обратно. Продавец отдал ему свою тысячу. На сколько рублей в итоге «прогорел» продавец?

5. Математические модели задач и системы линейных уравнений с двумя неизвестными

...чистый математик, который забыл бы о существовании внешнего мира, был бы подобен живописцу, умеющему гармонически сочетать цвета и формы, но лишённому натуры, модели — его творческая сила быстро бы иссякла.

Жюль Анри́ Пуанкаре́ (1854 – 1912),
французский математик, физик, астроном и философ

На уроках при решении практических задач вы часто используете их математические модели. Тем самым вы начинаете осваивать метод моделирования, который в наше время широко применяется в науке и практике. Суть его заключается в том, что человек в своей деятельности часто работает не с реальными объектами, явлениями и процессами, а с их моделями – «заместителями», отражающими все существенные для деятельности стороны этих объектов, но в более простой и удобной для работы форме.

Как вы помните, процесс решения текстовых задач методом моделирования включает в себя три основных этапа:

I. Построение математической модели задачи.

II. Работа с математической моделью.

III. Практический вывод.

На этапе построения математической модели задачи из ее условия выводятся соотношения (уравнения, неравенства и др.), которые описывают взаимосвязи между соответствующими величинами. Работа с математической моделью сводится к применению известных способов решения полученных уравнений и неравенств (а если они неизвестны, то к их построению). На третьем этапе полученные результаты соотносятся с условием и вопросом задачи, оцениваются их правдоподобие и соответствие здравому смыслу, фиксируется ответ.

В предыдущих пунктах мы познакомились с системами двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Возникает вопрос: требует ли коррекции описанный выше алгоритм решения задач, если задача сведется к системе уравнений? Для ответа на него попробуем применить этот алгоритм для решения следующей задачи.

Задача 1.

Задумано число. Известно, что оно на 36 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. При делении данного числа на сумму его цифр неполное частное равно 7, а остаток равен 6. Какое число задумали?

Решение:

<u>1. Определим, какие величины известны и какие надо найти.</u>

В задаче известны взаимосвязи между двузначным числом и его цифрами. Требуется найти двузначное число.

<u>2. Проверим соответствие единиц измерения величин.</u>

Все числа записаны в единой системе счисления – десятичной.

<u>3. Выберем неизвестные величины и введем для них буквенные обозначения.</u>

Обозначив неизвестное число буквой, мы не сможем записать взаимосвязь между его цифрами. Поэтому введем буквенные обозначения для цифр задуманного числа. Обозначим x – цифру разряда десятков, y – цифру разряда единиц.

<u>4. Определим множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.</u>

Так как x и y – это цифры двузначного числа, то $x \in \{1; 2; ...9\}$, $y \in \{0; 1; 2; ...9\}$.

<u>5. Установим взаимосвязи между величинами.</u>

1) Задуманное двузначное число можно записать $10x + y$. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке: $10y + x$. Первое число на 36 больше второго.

2) Сумма цифр задуманного числа равна $x + y$. При делении $10x + y$ на $x + y$ неполное частное равно 7, а остаток 6.

<u>6. Составим уравнение или неравенство (одно или несколько) и обоснуем их.</u>

Можем составить два уравнения.

1) Чтобы найти большее число, надо к меньшему прибавить разность, значит:

$$10x + y = 10y + x + 36$$

2) По формуле деления с остатком делимое $10x + y$ равно произведению делителя $(x + y)$ и неполного частного 7 плюс остаток 6, то есть:

$$10x + y = 7(x + y) + 6$$

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} 10x+y=10y+x+36 \\ 10x+y=7(x+y)+6 \\ x\in\{1;2;\ldots 9\} \\ y\in\{0;1;2;\ldots 9\} \end{cases} \to \boxed{10x+y-?}$$

7. Найдем все решения, удовлетворяющие построенной модели.

Искомые значения x и y должны удовлетворять каждому из составленных соотношений. Сначала решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x+y=10y+x+36 \\ 10x+y=7(x+y)+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-9y=36 \\ 10x+y=7x+7y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ 3x-6y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2. \end{cases}$$

Мы получили значения неизвестных, которые удовлетворяют обоим уравнениям. Осталось проверить соответствие найденных решений остальным соотношениям построенной модели:

$6 \in \{1; 2;\ldots 9\}$ (верно), $2 \in \{0; 1; 2;\ldots 9\}$ (верно).

8. Проверим соответствие полученного ответа вопросу задачи.

Найденное решение систем еще не является ответом к задаче. Определим искомое задуманное число: $10x + y = 10 \cdot 6 + 2 = 62$.

9. Убедимся, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Полученный ответ 62 является двузначным числом, что соответствует смыслу задачи.

Ответ: задумали число 62.

Таким образом, установленные нами ранее шаги алгоритма решения текстовых задач помогли нам и для решения задачи, сводящейся к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим еще два примера применения этого алгоритма для решения задач, один из которых – задача, наверняка известная многим с детства.

Пример 1.

Прилетели галки,
Сели на палки.
Если на каждой палке
Сядет по одной галке,
То для одной галки
Не хватит палки.

Если же на каждой палке
Сядет по две галки,
То одна из палок
Останется без галок.
Сколько было галок?
Сколько было палок?

Решение:

Обозначим x – количество галок, а y – количество палок. Понятно, что количество галок и палок может выражаться только натуральными числами, поэтому $x, y \in N$.

Строки «если на каждой палке сядет по одной галке, то для одной галки не хватит палки» означают, что x на 1 больше y.

Чтобы на каждой палке сидело по две галки и при этом «одна из палок будет без галок», количество галок должно быть в два раза больше, чем количество палок, уменьшенное на единицу, то есть x должно быть равно $2(y - 1)$.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x=2(y-1) \\ x,y\in N \end{cases} \rightarrow \boxed{x-?\ y-?}$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее построенной модели, найдем сначала решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2-y=1 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4. \end{cases}$$

Полученные значения принадлежат множеству натуральных чисел: $3\in N$, $4\in N$.

Ответ: было 4 галки и 3 палки.

Пример 2.

После сдачи экзаменов в университет близнецы Саша и Маша трудились в семейном бизнесе. Они заработали деньги, часть которых решили потратить на покупку нового фотоаппарата. Маша предложила купить фотоаппарат за 3380 рублей и согласна вложить в его покупку треть заработанных ею денег, тогда брату придется добавить половину своего заработка. Саша выбрал более качественный фотоаппарат, который стоит на 850 рублей дороже. Саша высчитал, что в этом случае они с сестрой должны вложить в эту покупку по 50% своих летних заработков. Сколько денег заработала за лето Маша, а сколько – Саша?

Решение:

Сначала согласуем единицы измерения – 3380 рублей составят 3,38 тыс. руб.

Пусть Маша заработала за лето x тыс. руб., а Саша – y тыс. руб. Ясно, что это количество может выражаться только положительным числом, поэтому $x>0$, $y>0$.

При покупке фотоаппарата за 3,38 тыс. руб. Маша вложит $\frac{1}{3}x$ тыс. руб., а Саша $0{,}5y$ тыс. руб. При покупке более дорогого фотоаппарата Маша вложит $0{,}5x$ тыс. руб., а Саша $0{,}5y$ тыс. руб. По условию, стоимость этого фотоаппарата составит $(3{,}38+0{,}85)$ тыс. руб.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x+0{,}5y=3{,}38 \\ 0{,}5x+0{,}5y=3{,}38+0{,}85 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1000x-? \\ 1000y-? \end{matrix}}$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x+0{,}5y=3{,}38 \\ 0{,}5x+0{,}5y=3{,}38+0{,}85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5x-\frac{1}{3}x=3{,}38+0{,}85-3{,}38 \\ 0{,}5x+0{,}5y=4{,}23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}x=0{,}85 \\ x+y=8{,}46 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5{,}1 \\ x+y=8{,}46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5{,}1 \\ y=3{,}36. \end{cases}$$

Соотнесем полученное решение с остальными соотношениями построенной модели: $5{,}1>0$ (верно); $3{,}36>0$ (верно). Значит, Маша заработала за лето 5100 руб., а Саша 3360 руб.

Полученные решения соответствуют реальной жизни, так как за лето можно заработать такие деньги.

Ответ: Маша заработала за лето 5100 руб., а Саша – 3360 руб.

К **198** 1) Периметр прямоугольника равен 16 см. Длина одной стороны на 5 см больше другой. Найдите площадь этого прямоугольника.

Переведите задачу на математический язык, составив:

а) числовое выражение;

б) уравнение с одним неизвестным.

в) систему уравнений с двумя неизвестными.

2) Решите задачу с помощью последней модели. Потребовалась ли корректировка уже известного вам алгоритма решения задач методом моделирования?

В № 199–207 решите задачу, составив систему уравнений:

199 Скорость моторной лодки по течению реки составила 22 км/ч, а против течения – 19 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

200 Сумма двух чисел равна 4. Если из большего числа вычесть меньшее, то получится 1. Найдите эти числа.

201 В зоомагазине продают больших и маленьких хомячков. Большой хомячок стоит вдвое дороже маленького. В первый день было продано 5 больших хомячков и 3 маленьких, а во второй – 5 маленьких и 3 больших. При этом в первый день за хомячков заплатили на 200 рублей больше, чем во второй. Сколько стоят хомячки?

202 На лужайке росли 35 одуванчиков, некоторые из которых были белыми, а остальные – еще желтыми. После того как 8 белых одуванчиков облетели, а два желтых – побелели, желтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько желтых одуванчиков росло на лужайке вначале?

203 Коневод продает двух коней с седлами, причем цена одного седла 48 000 рублей, а другого – 10 000 рублей. Первый конь с дорогим седлом втрое дороже другого с дешевым, а второй конь с дорогим седлом вдвое дешевле первого коня с дешевым. Какова цена каждого коня?

204 Одиннадцатикласснику Пете нужно было сдать несколько выпускных экзаменов. Перед последним из них он подсчитал, что для того чтобы его средний балл за все экзамены стал 95 баллов, ему необходимо набрать ровно 100 баллов на последнем экзамене, а для среднего балла, равного 90, ему достаточно набрать лишь 80 баллов. Сколько всего экзаменов у Пети?

205 В трех ящиках лежат конфеты. В первом ящике на 6 килограмм конфет меньше, чем в двух других вместе. А во втором – на 10 килограмм меньше, чем в двух других вместе. Сколько конфет в третьем ящике?

206 Из двух пунктов, расстояние между которыми 90 км, должны выехать навстречу друг другу два велосипедиста. Если второй велосипедист выедет на 1,5 часа позже первого, то он встретит первого велосипедиста через 3 часа после начала своего движения. Если второй велосипедист выедет на 1 час раньше первого, то он встретит первого через 4 часа. С какой скоростью двигался каждый из них?

207 Задумано двузначное число. Известно, что число единиц задуманного числа на 3 больше числа его десятков, а частное от деления этого числа на сумму его цифр равно 4. Найдите число, которое было задумано.

П **208** Какие из чисел 221, 237, 241, 247, 251, 257, 321 являются составными?

209 Найдите значение выражения:

а) $|5|+|-8|$; б) $|1{,}45|\cdot|-2|$; в) $|1{,}44|:|-12|$;

г) $-|1{,}5|-\left|-\frac{1}{2}\right|$; д) $-|6{,}3|\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)$; е) $-0{,}72:|-0{,}8|$;

ж) $\left|\frac{1}{8}\right|+|-0{,}125|$; з) $-|4{,}44|\cdot|-0{,}25|$; и) $|1{,}11|:|-0{,}25|$.

210 Решите уравнения устно:

а) $|x|=3$; г) $|10x-8|=0$;

б) $|-x|=-3$; д) $|5x|=-15$;

в) $|5x|=0$; е) $-|-5x|=15$.

211 Решите уравнения:

а) $|2x+4|=8$; г) $|3x+5|=|x-4|$;

б) $|4x-5|=13$; д) $|x+4|+|x-3|=4$;

в) $|2x+4|=|x+2|$; е) $|x+1|-|x-2|=5$.

Д *В № 212–214 решите задачу, составив систему уравнений.*

212 Сумма двух чисел равна 12. Если из утроенного первого числа вычесть удвоенное второе, то получится 1. Найдите эти числа.

213 Несколько пастухов пасли на поле коров. Петя насчитал на поле 54 ноги и 15 голов. Сколько было пастухов и коров?

214 В школе два восьмых класса, и всего в них учится 52 школьника. На экскурсию в музей современного искусства пошли треть учащихся 8 «А» класса и 25% учащихся 8 «Б» класса, а остальные отправились в музей космонавтики. Сколько школьников учится в 8 «Б» классе, если музей космонавтики посетило 37 восьмиклассников из этой школы?

215 Решите уравнения:

а) $|-x+3|=2$; б) $|2x+8|=|-x+2|$;

в) $|7-y|-|2y+8|=1$; г) $|x+4|+|x-3|=-4$.

216 Какие из чисел 121, 137, 141, 157 являются составными?

С **217*** Продавщица случайно смешала конфеты первого сорта (по 300 рублей за килограмм) и конфеты второго сорта (по 200 рублей за килограмм). По какой цене надо продавать эту смесь, чтобы выручить ту же сумму, если известно, что первоначально общая стоимость всех конфет первого сорта была равна общей стоимости всех конфет второго сорта?

218* Три ковбоя зашли в салун. Один купил 4 сандвича, чашку кофе и 10 пончиков – всего на 1 доллар 69 центов. Второй купил 3 сандвича, чашку кофе и 7 пончиков на 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий ковбой за сандвич, чашку кофе и пончик?

6. Системы двух линейных уравнений с модулями

Особенно нравилась математика верностью и очевидностью своих рассуждений.

Рене Декарт (1596–1650), французский математик, философ, физик

При решении систем линейных уравнений нам уже встречались случаи, когда необходимо исследовать несколько вариантов возможной взаимосвязи между величинами. Особое значение имеют системы уравнений с модулями. В данном пункте мы познакомимся со способами решения систем двух линейных уравнений с модулями.

Рассмотрим решение одной из задач, приводящих к таким системам.

Задача 1.

На координатной прямой отметили две точки, расстояние между которыми равно 5. Если координату одной из точек увеличить в 3 раза, а координату другой увеличить в 2 раза, то их сумма составит 10. Какие точки отметили?

Решение:

Обозначим координату первой точки x, а координату второй точки y, где x, y – некоторые числа.

Утроенное значение координаты одной из точек, например x, можно записать $3x$, тогда удвоенное значение координаты другой точки – $2y$. По условию, их сумма равна 10, значит,

$$3x + 2y = 10.$$

Расстояние между точками с координатами x и y можно записать в виде модуля $|x - y|$, значение которого, по условию, равно 5:

$$|x - y| = 5$$

Таким образом, математическая модель нашей задачи имеет вид системы двух линейных уравнений с модулем:

$$\begin{cases} |x-y|=5 \\ 3x+2y=10 \end{cases} \rightarrow \boxed{x - ?\ y - ?}$$

Модуль в уравнении $|x - y| = 5$ можно «раскрыть», пользуясь определением модуля числа:

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, \text{ если } x-y \geqslant 0 \\ y-x, \text{ если } x-y < 0 \end{cases}$$

Следовательно, уравнение $|x - y| = 5$ при $x - y \geqslant 0$ записывается в виде $x - y = 5$, а при $x - y < 0$ – в виде $y - x = 5$, и поэтому вместо одной системы уравнений с модулем нам придется рассмотреть две соответствующие системы.

<u>1 случай</u>

Если $x - y \geqslant 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y=15 \\ 2x+3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=25 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$$

При $x = 5$, $y = 0$, условие $x - y \geqslant 0$ выполняется. Значит, найденная пара чисел является решением исходной системы.

<u>2 случай</u>

Если $x - y < 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} y-x=5 \\ 2x+3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2x=10 \\ 2x+3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x=5 \\ 5y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$$

При $x = -1$, $y = 4$, условие $x - y < 0$ также выполняется. Значит, и эта пара чисел является решением исходной системы.

Таким образом, система имеет два решения: $x = 5$, $y = 0$ и $x = -1$, $y = 4$.

Ответ: на координатной прямой отметили точки с координатами 0 и 5 или точки с координатами -1 и 4.

Итак, при решении уравнения с модулем ***мы выполнили следующие шаги***:

1) «раскрыли» модуль, воспользовавшись определением модуля;

2) решили системы, которые получились в обоих случаях;

3) проверили для каждой из систем, удовлетворяет ли найденная пара чисел рассматриваемому случаю.

Однако в системе уравнений может оказаться не один, а два, три или более модулей. В этом случае необходимо рассмотреть все возможные варианты раскрытия модулей.

Пример 1.

Решить систему $\begin{cases} |x| + 2y = 1{,}5 \\ 2x - 4|y| = 3 \end{cases}$.

Решение:

В условии задачи нет ограничений на значения неизвестных x и y.

По определению модуля числа:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad |y| = \begin{cases} y, \text{ если } y \geqslant 0 \\ -y, \text{ если } y < 0 \end{cases}$$

Значит, чтобы раскрыть модули, нам надо рассмотреть 4 возможных случая сочетания знаков неизвестных x и y:

1) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; 3) $x < 0$, $y \geqslant 0$;

2) $x \geqslant 0$, $y < 0$; 4) $x < 0$, $y < 0$.

<u>1 случай</u>

Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} x+2y=1{,}5 \\ 2x-4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x-4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y=0 \\ x+2y=1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1{,}5 \\ y=0 \end{cases}$$

Оба полученные значения неизвестных удовлетворяют заданным условиям: $1{,}5 \geqslant 0$, $0 \geqslant 0$. Значит, найденная пара чисел является решением исходной системы.

<u>2 случай</u>

Если $x \geqslant 0$, $y < 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} x+2y=1{,}5 \\ 2x+4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1{,}5 \\ x+2y=1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x+2y=1{,}5$$

Получим равносильную систему, уравнения которой совпадают. Значит, исходная система равносильна каждому из данных уравнений. Следовательно, система имеет бесконечно много решений, где общее решение можно записать в виде: $(1{,}5 - 2y; y)$, где $y < 0$. Очевидно, что при этом $x = 1{,}5 - 2y \geqslant 0$.

3 случай

Если $x < 0$, $y \geqslant 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1{,}5 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 3 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y + 2x - 4y = 6 \\ -x + 2y = 1{,}5. \end{cases}$$

Первое уравнение не имеет решения, т.к. сводится к равенству $0 = 6$, значит, система не имеет решений.

4 случай

Если $x < 0$, $y < 0$, система имеет вид:

$$\begin{cases} -x + 2y = 1{,}5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 3 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -x + 2y = 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0{,}75. \end{cases}$$

Значение x не удовлетворяет заданному условию: неравенство $0 < 0$ ложно. Значит, и в этом случае решений тоже нет.

Обобщая все 4 случая и учитывая, что пара чисел $(1{,}5; 0)$ имеет вид: $(1{,}5 - 2y; y)$ при $y = 0$, мы можем записать множество решений исходной системы.

Ответ: $(1{,}5 - 2y; y)$, где $y \leqslant 0$.

Итак, мы приходим к следующему *алгоритму решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными с модулем*.

Алгоритм решения систем двух линейных уравнений с модулем

1. Найти в уравнениях все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Рассмотреть всевозможные комбинации случаев, когда каждое из этих выражений принимает неотрицательные и отрицательные значения.
3. Для каждого возможного случая «раскрыть» модули, используя определение модуля.
4. Решить все полученные системы.
5. Для каждого случая отобрать те решения системы, которые ему удовлетворяют.

Заметим, что при использовании данного алгоритма нужно внимательно анализировать полученные системы и уравнения, потому что иногда такой анализ позволяет существенно сократить решение. Так, если при рассмотрении случаев 2 и 3 заметить, что коэффициенты при неизвестных пропорциональны, то ответы можно записать сразу, не выполняя преобразований. А из уравнения $2x - 4|y| = 3$ следует, что $2x = 4|y| + 3 > 0$ (сумма неотрицательного и положительного чисел), поэтому третий и четвертый случаи невозможны, и их можно было не рассматривать, сделав соответствующую оговорку.

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых можно упростить решение системы.

Пример 2.

Решить систему $\begin{cases} 8x + 2|y| = 3 \\ 3x - 6|y| = 1. \end{cases}$

Решение:

Домножим первое уравнение на 3 и прибавим ко второму. Получим уравнение $27x = 10$, не содержащее переменной y. Следовательно, $x = \dfrac{10}{27}$.

Из первого уравнения $|y| = \frac{3-8x}{2} = \frac{1}{54}$. Значит, либо $y = \frac{1}{54}$, либо $y = -\frac{1}{54}$.

Ответ: система имеет два решения $\left(\frac{10}{27}; \frac{1}{54}\right)$ и $\left(\frac{10}{27}; -\frac{1}{54}\right)$.

В обоих уравнениях под модулем одно и то же неизвестное, поэтому мы смогли решить ее методом алгебраического сложения, не раскрывая модулей.

Пример 3.

Решить систему $\begin{cases} x - y = 2 \\ |x| + |y| = -3 \end{cases}$.

Решение:

Можно заметить, что во втором уравнении системы каждое из слагаемых в левой части неотрицательно: $|x| \geqslant 0$ и $|y| \geqslant 0$. Поэтому и их сумма тоже неотрицательна, и равенство $|x| + |y| = -3$ не может иметь места. Значит, система не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений.

Последние примеры показали, что прежде чем применять построенный нами новый алгоритм, нужно попробовать воспользоваться особенностями конкретной системы и понять, можно ли упростить ее решение. В рассмотренных нами примерах при решении систем с модулем мы использовали следующие «хитрые приемы»:

1. Если в обоих уравнениях системы под модулем стоит одна и та же неизвестная, то ее можно решить методом алгебраического сложения.

2. Можно выявить, что некоторые (или даже все) случаи, которые следует рассматривать для раскрытия модуля, невозможны.

219 Решите уравнение $2|x| - 3x = 1$, пользуясь определением модуля.

220 1) Решите систему уравнений, содержащую неизвестную под знаком модуля:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 2x - 3|y| = -5 \end{cases}.$$

2) Подумайте, как свести данную систему к известному случаю.

3) Проанализируйте, как вы решали эту систему, и предложите свой способ решения систем уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля. Сравните его со способом, предложенным на стр. 78 учебника.

221 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2|x| + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + 3|y| = 1 \\ 4x + 6y = -5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} |2x + 3y| = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2|x + 3y| = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

222 Чем данные системы отличаются от систем в предыдущем задании? Сколько вариантов раскрытия модулей нужно рассмотреть? Решите системы.

а) $\begin{cases} 2x + 3|y| = 5 \\ 3|x| - 2y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = -1 \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 2|x| + 3|y| = 4 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 6|x| - 9|y| = -3 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$.

223 Чем данные системы отличаются от систем в предыдущем задании? Решите их.

а) $\begin{cases} 4x-6|y|=-2 \\ 2x-3|y|=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4|x|+12y=1 \\ 6|x|+9y=1 \end{cases}$.

П **224** Найдите какие-нибудь два идущих подряд натуральных числа, у первого из которых сумма цифр равна 8, а второе – делится на 8.

225 Найдите НОК (a; b):

а) $a = 18$, $b = 12$; б) $a = 72$, $b = 600$;

в) $a = 250$, $b = 725$; г) $a = 102$, $b = 63$.

226 Пусть $A = \{2; 6; 9; 12; 16; 32; 36; 63\}$. В множестве A найдите подмножество B, состоящее из чисел, кратных 6, и подмножество C, состоящее из чисел, кратных 4. Найдите: а) $B \cap C$; б) $B \cup C$.

227 Решите неравенство:

а) $2x + 5 < 0$; б) $-4x - 2{,}4 < 0$; в) $2(x + 4) \leqslant x - 12$; г) $5y - 4(y + 3) \geqslant -y + 16$.

228 Найдите пересечение и объединение указанных числовых промежутков, изобразив их на числовой прямой:

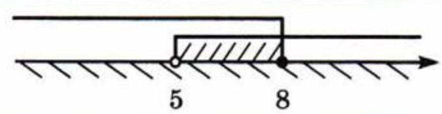
а) $(2; +\infty)$ и $[3; +\infty)$; в) $(-\infty; 9)$ и $(3; +\infty)$; д) $(-\infty; 10]$ и $[10; +\infty)$;

б) $(-\infty; -5)$ и $(-\infty; 5]$; г) $(-\infty; -3]$ и $[-9; +\infty)$; е) $(-\infty; 1]$ и $(2; +\infty)$.

Образец:

$(-\infty; 8] \cap (5; +\infty) = (5; 8]$

$(-\infty; 8] \cup (5; +\infty) = (-\infty; +\infty)$



Д **229** Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 9x-2y=-3 \\ 3x+|y|=9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x+9y=3 \\ |4x+6y|=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x+10|y|=19 \\ -4x+5|y|=-7 \end{cases}$.

230 Решите неравенство:

а) $-2x + 5 < 6$; б) $4y - 2{,}4 > 0$; в) $2(x + 4) \leqslant 5x - 4(x + 3)$.

231 Найдите пересечение и объединение указанных числовых промежутков, изобразив их на числовой прямой:

а) $[4; +\infty)$ и $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 3)$ и $(-3; +\infty)$; в) $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$.

С **232*** Решите следующие системы уравнений:

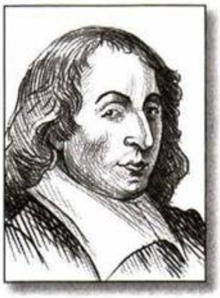
а) $\begin{cases} 2|x-1|+3y=6 \\ x-3y=-5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2|x+1|+3y=7 \\ 3x-2|y-3|=-1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} |2x+3y+3|=2 \\ |3x+2y-2|=1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2|x-2|+3|y+1|=14 \\ 6x+9y=1 \end{cases}$.

233* Зайцы распилили несколько бревен. Они сделали 10 распилов и получили 16 чурбачков. Сколько бревен они распилили?

234* Когда отцу было 27 лет, сыну было только три года, а сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет сейчас каждому из них?

7*. Системы линейных уравнений с тремя и более неизвестными



Наши знания никогда не могут иметь конца именно потому, что предмет познания бесконечен.

Блез Паскаль (1623–1662),
французский математик, физик, литератор и философ

При переводе условия задачи на математический язык иногда требуется обозначить буквами не две неизвестные величины, а три и даже более.

Задача 1.

Половина от суммы первого и второго углов треугольника на 90° меньше третьего угла. Если третий угол треугольника уменьшить в 3 раза, то он станет равен разности между первым и вторым углом. Найти градусные меры углов треугольника.

Решение:

Чтобы нам было проще записать на математическом языке условие задачи, обозначим величины углов треугольника x°, y° и z°. Ясно, что величина угла может принимать только положительные значения, меньшие 180°, поэтому

$$0 < x < 180,\ 0 < y < 180,\ 0 < z < 180.$$

Учитывая взаимосвязи, указанные в условии, можем записать два уравнения:

$$\frac{1}{2}(x+y)=z-90$$

$$\frac{z}{3}=x-y$$

А из свойства углов треугольника следует третье уравнение: $x + y + z = 180$.

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомые величины:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)=z-90\\ \frac{z}{3}=x-y\\ x+y+z=180\\ 0<x<180, 0<y<180, 0<z<180.\end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{matrix}x-?\\ y-?\\ z-?\end{matrix}}$$

Мы получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Упростим ее, приведя к целым коэффициентам:

$$\begin{cases}x+y=2z-180\\ z=3x-3y\\ x+y+z=180.\end{cases}$$

Сведем ее к системе с двумя неизвестными, которую мы уже умеем решать. Для этого подставим значение z из второго уравнения в остальные уравнения системы.

Теперь мы работаем только с первым и третьим уравнениями системы как с системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Для удобства поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x+y=2(3x-3y)-180 \\ x+y+3x-3y=180 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7y=180 \\ 4x-2y=180 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7(2x-90)=180 \\ y=2x-90 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x=-450 \\ y=2x-90 \\ z=3x-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=10 \\ z=3x-3y. \end{cases}$$

Наконец, подставив найденные значения x и y в третье уравнение, получим, что $z=120$, и при этом $0<50<180$, $0<10<180$, $0<120<180$.

Ответ: 50°, 10°, 120°.

Итак, при решении задачи мы получили *систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными*. Для ее решения мы использовали способ подстановки, после чего получили в системе *два уравнения с двумя неизвестными*. Из них мы нашли значения этих неизвестных уже известным нам способом и подставили их в третье уравнение. В результате мы нашли тройку чисел, которая удовлетворяет всем трем уравнениям сразу.

При решении задач могут получаться системы уравнений с большим количеством неизвестных, их решение осуществляется аналогичным образом.

Пример 1.

Решить систему $\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x-2y-z=1 \\ 5x-6y+z=1 \end{cases}$.

Решение:

Выразим x из первого уравнения: $x=2y-3z+3$.

Подставим найденное значение x в остальные уравнения и выполним равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x=2y-3z+3 \\ 2(2y-3z+3)-2y-z=1 \\ 5(2y-3z+3)-6y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z+3 \\ 2y-7z=-5 \\ 4y-14z=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3z+3 \\ y=\dfrac{7z-5}{2} \\ 4\cdot\dfrac{7z-5}{2}-14z=-14. \end{cases}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству $0=-4$, поэтому система не имеет решений.

Ответ: система не имеет решений.

Заметим, что мы могли решить данную систему, используя другой известный нам способ – способ алгебраического сложения.

Анализируя уравнения, мы видим, что, вычитая первое уравнение из второго, мы «избавляемся» от y во втором уравнении. Аналогичным образом мы можем избавиться от y в третьем уравнении, домножив первое уравнение на 3 и вычитая его из третьего уравнения. Таким образом, мы получаем цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ 2x-2y-z=1 \\ 5x-6y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ 5x-6y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ 5x-6y+z-3(x-2y+3z)=1-3\cdot 3 \end{cases}$$

Приведем в полученной системе подобные слагаемые и используем метод алгебраического сложения для второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ 2x-8z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ x-4z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=3 \\ x-4z=-2 \\ x-4z-(x-4z)=-2-(-4) \end{cases}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству $0 = 2$. Значит, не имеет решений и вся система.

Ответ: система не имеет решений.

Итак, исходя из заданных коэффициентов, мы выбрали, какое из неизвестных удобнее убирать из уравнений системы. Затем домножали одно из уравнений и выполняли его алгебраическое сложение с остальными уравнениями. Таким образом, мы получили в системе два уравнения с двумя неизвестными, которые мы уже умеем решать.

Данный прием алгебраического сложения можно применить и для систем из k линейных уравнений с n неизвестными.

Пример 2.

Решить систему $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-3y+4z=6 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases}$.

Решение:

Применим метод алгебраического сложения:

$$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-3y+4z=6 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-3y+4z-2(x-2y+3z)=6-2\cdot 5 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 3x-4y+5z=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 3x-4y+5z-3(x-2y+3z)=7-3\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 2y-4z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 2y-4z-2(y-2z)=-8-2\cdot(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \\ 2y-4z-2y+4z=0 \end{cases}$$

Третье уравнение преобразуется к равенству $0 = 0$, которое справедливо при любых x, y и z. Таким образом, система равносильна системе из двух уравнений $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=-4 \end{cases}$.

Значит, данная система имеет бесконечно много решений, поскольку для каждого z можно найти такие x и y, чтобы все уравнения системы обращались в верные равенства.

Выразим через z из первых двух уравнений значения x и y и запишем ответ.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $(z-3;\ 2z-4;\ z)$, z – любое число.

Мы разобрали случаи, в которых система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

1) имеет единственное решение;

2) не имеет решений;

3) имеет бесконечно много решений.

Примем без доказательства, что этим исчерпываются все возможные варианты решения систем из n линейных уравнений с n неизвестными.

Можно доказать, что

> *Система из n линейных уравнений с n неизвестными либо имеет единственное решение, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.*

В разобранных нами примерах мы уже сталкивались с системами, в которых количество уравнений было меньше, чем количество неизвестных. Такие системы либо не имеют решений, либо имеют бесконечно много решений.

Можно доказать, что

> *Система из k линейных уравнений с n неизвестными при $k < n$ либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.*

Доказательство этого свойства мы также проводить не будем.

Пример 3.

Решить систему $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ 2x+8y+z=7 \end{cases}$.

Решение:

Выразим x из первого уравнения, подставим его во второе уравнение и приведем подобные слагаемые. А затем выразим y из второго уравнения:

$$\begin{cases} x=-3y+z+2 \\ 2(-3y+z+2)+8y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+z+2 \\ 2y+3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y+z+2 \\ y=\dfrac{3-3z}{2} \end{cases}$$

Полученная система имеет бесконечно много решений, поскольку для каждого z можно найти такие x и y, чтобы все уравнения системы обращались в верные равенства. Действительно, $y=\dfrac{3-3z}{2}$, а $x=-3y+z+2=-3\cdot\dfrac{3-3z}{2}+z+2=\dfrac{11z-5}{2}$.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $\left(\dfrac{11z-5}{2};\dfrac{3-3z}{2};z\right)$, z – любое число.

Пример 4.

Решить систему $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z=6 \end{cases}$.

Решение:

Домножим первое уравнение на 2 и вычтем из второго, а затем приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z-2(x+2y+z)=6-2\cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z-2x-4y-2z=-4 \end{cases}$$

В полученной равносильной системе второе уравнение не имеет решения. Следовательно, не имеет решений и вся система.

Ответ: система не имеет решений.

К **235** 1) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+2z=9 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}.$$

2) Подумайте, можно ли использовать идеи известных вам способов решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными для этой системы.

3) Проанализируйте, как вы решали эту систему, и предложите свои алгоритмы решения систем уравнений из трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

236 Решите системы способом подстановки и способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=-4 \\ 2x+3y+4z=1 \\ x+y+z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -3x+10y-10z=1 \\ -7x+4y-4z=1 \\ -2x-3y+3z=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$.

237 Решите следующие системы в зависимости от параметра a:

а) $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+2y+2z=a \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 3x-2y+z=2 \\ x-y+z=a \end{cases}$.

П **238** Отцу, сыну и деду вместе 105 лет. Отцу и сыну вместе 45 лет, а деду и внуку вместе 70 лет. Сколько лет каждому из них?

239 Вычислите:

$$\frac{(9^{15}:3^{28})\cdot 2^{43}\cdot 17^{34}\cdot (17^{3})^{10}\cdot \left(\dfrac{6^{48}}{6^{15}}\right)}{34^{35}\cdot (17^{63}:17^{34})\cdot 2^{39}\cdot 3^{34}}.$$

240 Найдите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $3xy\,(4x^2-6xy+2y^2)-2xy(5x^2-7xy+2y^2)$ при $x=2,\ y=-1$;

б) $p^2q^2(3p^3-2p^2-2pq-3)-3p^2q(2p^3q-5p^2q-4pq^2-7q)$ при $p=q=1$.

Д **241** Решите систему способом подстановки. Выполните проверку полученного результата, решив систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ -2x+7y+2z=10 \\ 3x+2y-4z=9. \end{cases}$$

242 Вычислите:

$$\frac{2^{16}\cdot 14^{23}\cdot 5^{35}\cdot (2^5)^3\cdot (7^{36}:\ 7^{13})}{10^{24}\cdot \left(\dfrac{7}{5}\right)^{18}\cdot 35^{28}\cdot 2^{29}}.$$

243 Найдите пересечение указанных числовых промежутков:

а) $[6;+\infty)$ и $(-1;+\infty)$; б) $(-\infty;-5)$ и $(-3;+\infty)$; в) $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{4}\right)$ и $\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

244 Найдите объединение указанных числовых промежутков:

а) $(-\infty; -3)$ и $(-5; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

б) $(-\infty; -5)$ и $(-3; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

в) $(-\infty; -3)$ и $[-3; 5)$; е) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left[-\frac{1}{2}; 2\right)$ и $\left(2; +\infty\right)$.

Ответ запишите в возможно более короткой форме.

C **245*** Число состоит из 2013 единиц. Какой у него остаток при делении на 11?

246* Вычислите произведение:

$$\left(100-1^2\right)\left(100-2^2\right)\left(100-3^2\right)\ldots\left(100-25^2\right).$$

247* Найдите все пары целых чисел m и n таких, что $4m+5n=mn-9$.

248* Найдите наибольший общий делитель чисел $7^{2011}-1$ и $7^{1993}-1$.

Экспресс-тест № 2

Примерное время выполнения – 40минут

Часть А

№ 1

№1. Решением уравнения $5x+7y=16$ является пара чисел:

А) $(0; 2{,}3)$; Б) $(1{,}6; 1)$; В) $(0{,}4; 2)$; Г) $\left(-3; -\frac{1}{7}\right)$.

№ 2			
1	2	3	4

№2. Установите соответствие между уравнением и его решением:

1) $3x+0y=6$, А) $\left(-\frac{2}{3}y; y\right)$, y – любое число,

2) $3x+2y=0$, Б) $x=2$; y – любое число,

3) $0x+3y=6$, В) $(x; 3-1{,}5x)$, x – любое число,

4) $3x+2y=6$. Г) $y=2$; x – любое число.

№ 3			
1	2	3	4

№3. Определите для каждого графика, изображенного на рисунке 1, соответствующее ему уравнение:

А) $x+y=0$; В) $2x-y=-4$;

Б) $0x-2y=6$; Г) $2x-0y=5$.

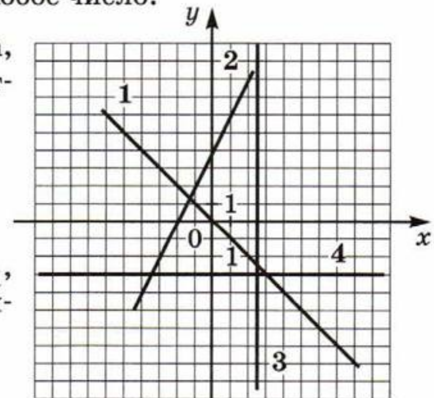


Рис. 1

№ 4

№4. Укажите значение разности x_1 и y_1, если известно, что $(x_1; y_1)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}4x+3y=-6,\\5x+y=9.\end{cases}$

А) -2; Б) -3; В) -18; Г) 9.

№ 5

№5. Выберите математическую модель данной задачи.

Если сложить возраст отца и возраст сына, то получится 60. Через 10 лет отношение возраста отца к возрасту сына будет равно 4. Сколько лет отцу и сколько лет сыну в настоящий момент?

А) $\begin{cases} x+y=60 \\ \dfrac{x}{y}=4 \end{cases}$;   В) $\begin{cases} x+y=60 \\ \dfrac{x+10}{y}=4 \end{cases}$;

Б) $\begin{cases} x+y=60 \\ \dfrac{x+10}{y+10}=4 \end{cases}$;   Г) $\begin{cases} x+y=60 \\ \dfrac{x}{y}+10=4 \end{cases}$.

Часть В

№6. С помощью графика решите систему уравнений и установите соответствие предложенным вариантам ответов

№ 6			
1	2	3	4

1) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}y=0 \\ 2x+y=6 \end{cases}$;   2) $\begin{cases} y=-2x \\ -0{,}5x-y=-3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 6x+3y=18 \\ y=-2x+6 \end{cases}$;   4) $\begin{cases} y=-2x+6, \\ y=-0{,}5x+3. \end{cases}$

А) $(-2; 4)$;   Б) $(2; 2)$;   В) $\varnothing$;   Г) бесконечное множество решений.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{7}{y}=31 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{y}=7 \end{cases}.$$

№8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 6m-4d=-5 \\ |2m-d|=3 \end{cases}.$$

№9. Решите систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=9 \\ x-y-z=1 \end{cases}.$$

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2				№ 3				№ 4	№ 5	№ 6			
В	1	2	3	4	1	2	3	4	Г	Б	1	2	3	4
	Б	А	Г	В	А	В	Г	Б			В	А	Г	Б

№ 7

Сделав замену $\frac{1}{x}=a$ и $\frac{1}{y}=b$, перейдем к системе линейных уравнений $\begin{cases}6a+7b=31\\6a-5b=7\end{cases}$.

$$\begin{cases}6a+7b=31\\6a-5b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+7b=31\\-6a+5b=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+7b=31\\12b=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+7\cdot 2=31\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{17}{6}\\b=2\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{17}{6}\\\frac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{6}{17}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Ответ: $x=\frac{6}{17}$; $y=\frac{1}{2}$.

№ 8

$$\begin{cases}2m-d\geqslant 0\\6m-4d=-5\\2m-d=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-d\geqslant 0\\m=8{,}5\\d=14\end{cases}$$

$2\cdot 8{,}5-14\geqslant 0$ – *верно*

или

$$\begin{cases}2m-d<0\\6m-4d=-5\\2m-d=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-d<0\\m=-3{,}5\\d=-4\end{cases}$$

$2\cdot(-3{,}5)+4<0$ – *верно*

Ответ: $d = 14$, $m = 8{,}5$; $d = -4$, $m = -3{,}5$.

№ 9

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x-y+z=9\\x-y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\x-y+z=9\\2z=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\x-y+z=9\\z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+a=3\\x-y+4=9\\z=4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1\\x-y=5\\z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1\\2x=4\\z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-1\\x=2\\z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+y=-1\\x=2\\z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3\\x=2\\z=4\end{cases}$$

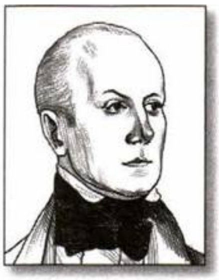
Ответ: $x = 2$; $y = -3$; $z = 4$.

Шкала успешности:

12–15 баллов – *отлично*
7–11 баллов – *хорошо*
5–6 баллов – *удовлетворительно*

§2. Системы и совокупности линейных неравенств

1. Системы и совокупности линейных неравенств с одним неизвестным



...каждая математическая теорема осуществляется где-нибудь в природе, в какой-либо комбинации молекул или элементов. Математика кажется нам отвлеченной только потому, что мы не замечаем применения ее принципов в природе.

Петр Яковлевич Чаадаев (1794–1856),
русский философ, публицист

В седьмом классе мы научились решать линейные неравенства и записывать их решение с помощью числовых промежутков. Однако при решении некоторых практических задач приходится составлять не одно, а несколько неравенств.

Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача

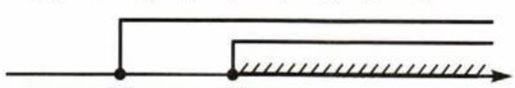
В аквапарке на горке «Горная речка» разрешено кататься всем детям начиная с 11 лет. А на горку «Для смельчаков» дети младше 14 лет не допускаются. Дети какого возраста могли прокатиться с каждой из этих горок? Хотя бы с одной из них?

Решение:

Пусть искомый возраст детей – x лет. Тогда условие допуска на горку «Для смельчаков» можно записать в виде неравенства $x \geqslant 14$, а условие допуска на горку «Горная речка» – в виде неравенства $x \geqslant 11$.

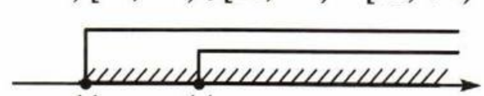
Изобразим числовые промежутки, соответствующие данным неравенствам, используя «упрощенную» числовую прямую (рис. 1). Тогда возраст детей, которых пропустят на обе горки, следует искать на *пересечении* отмеченных промежутков (рис. 1а), а возраст детей, которых пропустят хотя бы на одну горку, – на *объединении* этих промежутков (рис. 1б).

а) $[11;\ +\infty) \cap [14;\ +\infty) = [14;\ +\infty)$



а)

б) $[11;\ +\infty) \cup [14;\ +\infty) = [11;\ +\infty)$



б)

Рис. 1

Ответ: с каждой из этих горок могли прокатиться дети начиная с 14 лет, а хотя бы с одной из них – начиная с 11 лет.

Если требуется найти значения неизвестных, которые удовлетворяют ***сразу нескольким*** неравенствам, то эти неравенства называют **системой неравенств** и записывают с помощью фигурной скобки. Если же требуется найти значения неизвестных, которые удовлетворяют ***хотя бы одному из нескольких*** неравенств, то эти неравенства называют **совокупностью неравенств** и записывают с помощью квадратной скобки.

Таким образом, для ответа на первый вопрос задачи мы фактически решали *систему неравенств*: $\begin{cases} x \geqslant 14 \\ x \geqslant 11 \end{cases}$, а для ответа на второй вопрос – *совокупность неравенств*: $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 14 \\ x \geqslant 11 \end{array}\right.$.

В данном пункте мы познакомимся с решением систем и совокупностей линейных неравенств с одним неизвестным.

Напомним, что *линейным неравенством с одним неизвестным* x называется неравенство, которое может быть представлено в одном из четырех видов:

$kx + b > 0$; $kx + b < 0$; $kx + b \geqslant 0$; $kx + b \leqslant 0$.

Как мы знаем, решением линейного неравенства с одним неизвестным может быть один из числовых промежутков:

открытый луч: $(a; +\infty)$; $(-\infty; a)$;

замкнутый луч: $[a; +\infty)$; $(-\infty; a]$;

вся числовая прямая: $(-\infty; +\infty)$;

пустое множество: $\varnothing$.

В систему и совокупность линейных неравенств с одним неизвестным x могут входить два, три или более неравенств.

Из определения системы неравенств следует, что множеством ее решений является *пересечение* множеств решений неравенств, входящих в систему. Легко доказать, что это может быть либо промежуток, либо единственная точка, либо пустое множество, например:

$(-\infty; 3] \cap (2; +\infty) = (2; 3]$, $(-\infty; 3] \cap [3; +\infty) = \{3\}$, $(-\infty; 3] \cap [5; +\infty) = \varnothing$.

Аналогично из определения совокупности неравенств следует, что множеством ее решений является *объединение* множеств решений неравенств, входящих в совокупность. Результатом здесь может быть либо промежуток, либо пустое множество, либо объединение промежутков, поскольку, например, множество $(-2; 3] \cup [5; +\infty)$ не является промежутком, и никакой другой более простой записи для этого множества придумать нельзя.

Сначала разберемся с тем, как решать *системы* неравенств. Для этого решим, например, систему

$$\begin{cases} -2x+4<0 \\ 3x-5>0 \\ 2x-7 \leqslant 0 \end{cases},$$

после чего установим, с помощью каких шагов можно решить любую другую систему неравенств.

Заменим каждое из неравенств системы на более простое с помощью равносильных преобразований. Получим системы, равносильные исходной.

$$\begin{cases} -2x+4<0 \\ 3x-5>0 \\ 2x-7 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x<-4 \\ 3x>5 \\ 2x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>1\dfrac{2}{3} \\ x \leqslant 3\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Решением первого неравенства полученной системы является промежуток $(2; +\infty)$, второго – промежуток $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$, а третьего – промежуток $\left(-\infty; 3\frac{1}{2}\right]$.

Чтобы найти их пересечение, воспользуемся числовой прямой:

По схеме видно, что их пересечением является промежуток $\left(2; 3\frac{1}{2}\right]$.

При решении системы линейных неравенств мы использовали следующее **равносильное преобразование систем неравенств** – заменили одно из неравенств системы на равносильное ему неравенство.

Заметим, что в отличие от систем уравнений, прием сложения неравенств одного знака при решении систем линейных неравенств не дает возможности решить систему. Так, например, сложение неравенств системы $\begin{cases} 3x-5>0 \\ 5x-3>0 \end{cases}$ дает неравенство $8x - 8 > 0$, решение $x \in (1; +\infty)$ которого содержит значения неизвестного, не удовлетворяющие первому из неравенств системы.

Можем записать следующий алгоритм решения систем неравенств.

Алгоритм решения систем линейных неравенств

1. Найти решение каждого из неравенств системы.
2. Изобразить найденные промежутки на числовой прямой.
3. Найти на числовой прямой пересечение промежутков (отметить общую часть изображенных промежутков).
4. Записать в ответ полученное множество.

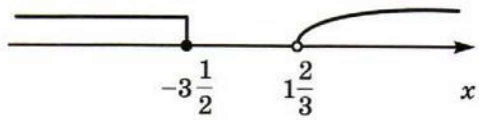
Пример 1.

Решить $\begin{cases} 3x-5>0 \\ 2x+7\leqslant 0 \end{cases}$.

Решение:

Решением первого неравенства является луч $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$, второго – луч $\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right]$, а их пересечением является пустое множество.

Изобразим решение на числовой прямой и запишем его на математическом языке:



$$\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right] \cap \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right) = \varnothing$$

Ответ: $\varnothing$.

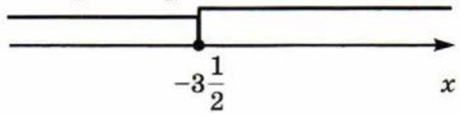
Пример 2.

Решить $\begin{cases} 6x+21\geqslant 0 \\ 2x+7\leqslant 0 \end{cases}$.

Решение:

Решением первого неравенства является луч $\left[-3\frac{1}{2}; +\infty\right)$, второго – луч $\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right]$, а их пересечением является точка $\left\{-3\frac{1}{2}\right\}$.

Изобразим решение на числовой прямой и запишем его на математическом языке:



$$\left(-\infty; -3\frac{1}{2}\right] \cap \left[-3\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left\{-3\frac{1}{2}\right\}$$

Ответ: $\left\{-3\frac{1}{2}\right\}$.

Теперь разберемся с тем, как решать *совокупности* неравенств. Из определения совокупности неравенств следует, что мы должны выполнять те же шаги, что и при решении систем неравенств, кроме одного: по схеме следует искать не пересечение промежутков, а их объединение.

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм решения совокупности неравенств.

Алгоритм решения совокупности линейных неравенств

1. Найти решение каждого из неравенств системы.
2. Изобразить полученные промежутки на числовой прямой.
3. Найти на числовой прямой объединение промежутков (отметить все точки изображенных промежутков).
4. Записать в ответ полученное множество.

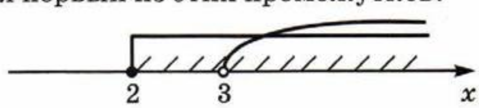
Пример 3.

Решить $\left[\begin{array}{l} 2x-4 \geqslant 0 \\ 6-2x<0 \end{array}\right.$.

Решение:

Заменим каждое из неравенств совокупности на более простое с помощью равносильных преобразований. Получим совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x>3 \end{array}\right.$, равносильную исходной.

Изобразим промежутки $[2; +\infty)$ и $(3; +\infty)$ на одной схеме. Их объединением является первый из этих промежутков.



$$[2; +\infty) \cup (3; +\infty) = [2; +\infty)$$

Ответ: $[2; +\infty)$.

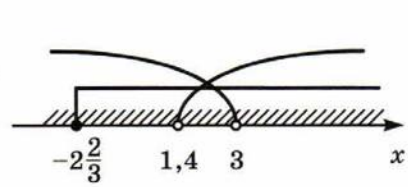
* * *

Пример 4.

Решить $\left[\begin{array}{l} 7-5x<0 \\ 8+3x \geqslant 0 \\ 2x-4 \leqslant 2 \end{array}\right.$.

Решение:

Множествами решений трех неравенств совокупности являются соответственно промежутки $(1{,}4; +\infty)$, $\left[-2\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и $(-\infty; 3)$. Их объединением является вся числовая прямая.

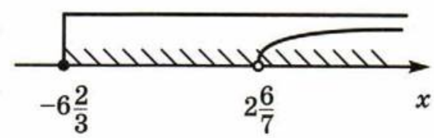


Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

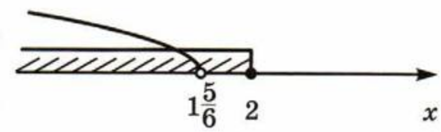
Пример 5*.

Решить систему $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 7x-20>0 \\ 0{,}3x+2\geqslant 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 6x-11<0 \\ 0{,}5x-1\leqslant 0 \end{array}\right. \\ 3x-6\geqslant 0 \end{cases}$.

Решение:

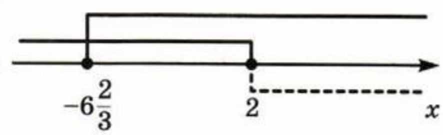


1. Множествами решений двух неравенств первой совокупности являются промежутки $\left(2\frac{6}{7};+\infty\right)$ и $\left[-6\frac{2}{3};+\infty\right)$. Их объединением является второй промежуток $\left[-6\frac{2}{3};+\infty\right)$.



2. Аналогично решением второй совокупности является промежуток $(-\infty; 2]$.

3. Наконец, множеством решений неравенства $3x-6\geqslant 0$ является промежуток $[2; +\infty)$, который выделен пунктирной прямоугольной скобкой.



4. Пересечением трех полученных множеств является множество, состоящее из единственной точки $x = 2$:

$$\left[-6\frac{2}{3};+\infty\right)\cap(-\infty;2]\cap[2;+\infty)=\{2\}$$

Ответ: $\{2\}$.

Замечание.

Решение данной системы можно найти быстрее, если заметить, что вторая совокупность и последнее неравенство имеют единственное общее решение $x = 2$:

$$(-\infty; 2]\cap[2; +\infty) = \{2\}.$$

Значит, $x = 2$ – это единственный возможный вариант решения и всей системы. Поэтому мы можем получить ответ, не решая первую совокупность, а лишь проверив, удовлетворяет ли ей число 2.

Таким образом, при решении подобных конструкций из систем и совокупностей бывает полезным *рассматривать промежуточные пересечения или объединения множеств*.

К **249** Решите неравенства $3x-12\geqslant 0$ и $-4x+28>0$. Из множества $A=\{3; 4; 5; 6; 7\}$ выпишите числа, которые:

а) принадлежат сразу обоим множествам решений этих неравенств;

б) принадлежат хотя бы одному из множеств решений этих неравенств.

Как иначе можно сформулировать эти задания?

250 Мама попросила Сашу потратить на покупку его нового велосипеда не более 3000 рублей, а папа сказал, что хороший велосипед не может стоить меньше 2000 рублей. Запишите просьбу мамы и папы на математическом языке. Выясните, какой из велосипедов стоимостью 3200 рублей; 2300 рублей; 1300 рублей удовлетворяет:

а) обоим соотношениям;

б) хотя бы одному из записанных соотношений.

За какую цену Саша может купить велосипед, чтобы удовлетворить требованиям обоих родителей? Хотя бы одного из родителей? Сколько, по твоему мнению, может стоить велосипед, который купит Саша?

251 Проанализируйте следующее задание: «Найдите все значения x, которые:
а) удовлетворяют обоим неравенствам $ax + b > 0$ и $kx + n < 0$;
б) удовлетворяют хотя бы одному из неравенств $ax + b > 0$ и $kx + n < 0$».
Запишите это задание иначе, предложив свои знаки. Сравните их с общепринятыми понятиями и их обозначениями на стр. 91.

252 Придумайте практическую ситуацию, которая требует решения системы неравенств. Запишите эту систему неравенств и попробуйте решить ее с опорой на числовую прямую. Составьте алгоритм решения системы неравенств и сравните его с алгоритмом на стр. 92.

253 Запишите решения простейших систем неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x > 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x > 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x < 5 \end{cases}$.

254 Придумайте практическую ситуацию, которая требует решения совокупности неравенств. Запишите эту совокупность неравенств и попробуйте решить ее с опорой на числовую прямую. Составьте алгоритм решения совокупности неравенств и сравните его с алгоритмом на стр. 93.

255 Запишите решения простейших совокупностей неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x < 5 \end{array}\right.$; в) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$; г) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 2 \\ x < 5 \end{array}\right.$.

256 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-5 \geqslant 1 \\ 2-x > -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3-3x \geqslant 1 \\ x-4 < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-7 \leqslant 11 \\ 3-4x > -5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x-2 \leqslant 4 \\ 3x-3 > 6 \end{cases}$.

257 Решите совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x-5 \geqslant 1 \\ 3-4x > -5 \end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l} 5x-9 \geqslant 1 \\ 4-7x < -3 \end{array}\right.$; в) $\left[\begin{array}{l} -3-5x \leqslant 2 \\ 2x-3 > 11 \end{array}\right.$; г) $\left[\begin{array}{l} 2x-12 \leqslant 10 \\ 3x-18 > 15 \end{array}\right.$.

258 Решите:

а) $\begin{cases} 5x-1>0 \\ -3x+2 \leqslant 0 \\ -10x+2>0 \end{cases}$; б) $\left[\begin{array}{l} 2-3x \geqslant 0 \\ 5-x<0 \\ 1+2x<0 \end{array}\right.$; в) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-5 \geqslant 0 \\ 4x-12<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 8x-32>0 \\ 35-7x>0 \end{cases} \end{array}\right.$.

259 Решите двойное неравенство двумя способами: с помощью перехода к системе и с помощью равносильных преобразований неравенства.

а) $-2 \leqslant x+4 < -1$;

б) $-1 \leqslant 0,3x+2 < 2,6$;

в) $5 \leqslant \dfrac{2x-1}{3} \leqslant 7$;

г) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2-3x}{4} < \dfrac{5}{8}$;

д) $-4 < 4x^2-(2x-1)(2x+1)+x \leqslant 5$;

е) $x \leqslant \dfrac{(x+2)^2-x^2}{3} < 1\dfrac{1}{2}$.

Какой из этих способов вы находите более удобным?

П **260** Изобразите схематично график линейной функции с положительным коэффициентом.

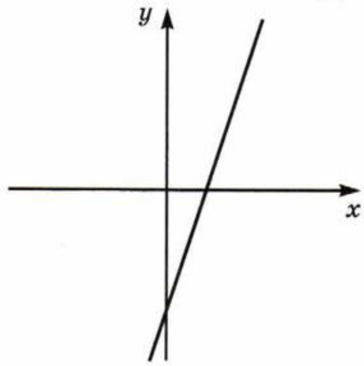
а) Отметьте точку, в которой функция равна нулю.

б) Обведите красным цветом ту часть графика, где функция принимает положительные значения. При каких значениях аргумента это происходит – заштрихуйте на оси Ox соответствующий промежуток.

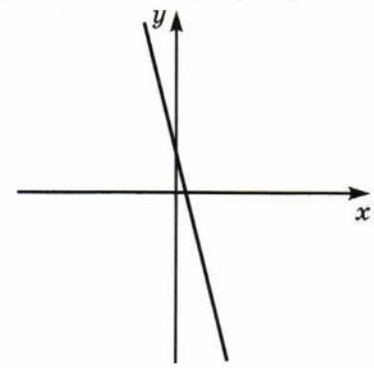
в) Обведите синим цветом ту часть графика, где функция принимает отрицательные значения. При каких значениях аргумента это происходит – заштрихуйте на оси Ox соответствующий промежуток.

Выполните то же самое задание со схематичным изображением графика линейной функции с отрицательным коэффициентом. Какой вывод вы можете сделать?

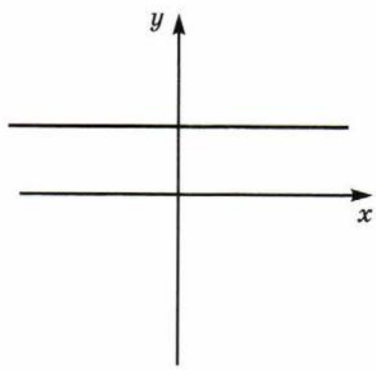
261 Определите знак углового коэффициента линейной функции по ее графику:



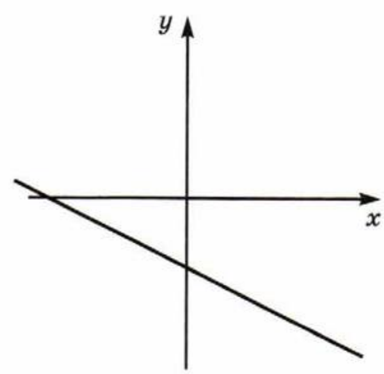
а)



б)



в)



г)

262 Выясните знак углового коэффициента линейной функции, если:

а) она принимает положительные значения справа от точки пересечения с Ox;

б) она принимает отрицательные значения справа от точки пересечения с Ox.

263 Перепишите функции в виде кусочно-линейных, выделяя промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют своего знака. Постройте графики этих функций:

а) $y = |x+1| - 4$; б) $y = 4 - |2x - 4|$; в) $y = |2x| - |3x - 5|$; г) $y = |1 - x| - |x - 5|$.

264 Выпишите числа a, b, c и d в порядке возрастания:

$a = \frac{2}{50} + \frac{8}{75}$; $b = \frac{4}{9} - \frac{2}{7}$; $c = \frac{7}{23} - \frac{1}{7}$; $d = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$.

265 Шариковая ручка стоит четыре рубля. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 30 рублей после повышения цены ручки на 10% ?

266 Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) 1, 2, 3; б) 2, 4, 8; в) 16, 36, 56; г) 18, 48, 90.

267 Упростите выражения:

а) $1\frac{2}{3}ab-2\frac{7}{15}ab-\frac{1}{5}ab+\frac{5}{6}ab$; б) $0{,}5n+0{,}2n^2-0{,}2n+0{,}8n^2$.

268 Упростите выражения при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{2ab}{5xy}:\frac{3ab}{5by}$; б) $4am:\frac{8mx}{2x^2}$; в) $\left(\frac{3a}{5b}:\frac{4a}{7b}\right)\cdot\frac{20}{21}$.

Д **269** Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases}2x-5\geqslant 3\\5-3x>-4\end{cases}$; б) $\begin{cases}2-4x\geqslant -2\\3x-10<2\end{cases}$; в) $\begin{cases}x-2\leqslant 1\\13-4x>1\end{cases}$; г) $\begin{cases}x-2\leqslant 4\\3x-6>12\end{cases}$.

270 Решите совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}3x-5\geqslant 4\\13-x>-1\end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l}5x-3\geqslant 2\\4-9x<-5\end{array}\right.$; в) $\left[\begin{array}{l}13-x\leqslant 3\\2x-7>1\end{array}\right.$; г) $\left[\begin{array}{l}3x-15\leqslant 6\\4x-20>8\end{array}\right.$.

271 Решите:

а) $\begin{cases}3x+6\geqslant 0\\3-2x\leqslant 0;\\6x-9\leqslant 0\end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l}7-5x<0\\8+3x\geqslant 0.\\2x-4\leqslant 2\end{array}\right.$

272 Изобразите схематично график линейной функции, угловой коэффициент которой:

а) положителен, б) отрицателен, в) равен нулю.

Заштрихуйте красным цветом на оси абсцисс промежуток, на котором данная функция принимает положительные значения, а синим – на котором данная функция принимает отрицательные значения.

В каком случае штриховка получилась одноцветной?

273 Выясните знак углового коэффициента линейной функции, если:

а) она принимает отрицательные значения справа от точки пересечения с Ox;
б) она принимает отрицательные значения слева от точки пересечения с Ox.

274 Постройте графики функций:

а) $y=|2x+1|-x$; б) $y=3-|5x-3|+|2-4x|$.

275 Упростите выражения при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{4x}{3y}:\frac{20bx}{9ay}$; б) $90mn:\frac{45nx}{2my}$; в) $\left(\frac{5xy}{9ab}\cdot\frac{12b^2}{25x^2y}\right):\frac{1}{x}$.

С **276*** Решите систему
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x-2>10\\0{,}5x+1\geqslant 3\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}5x-11<4\\0{,}25x-3\leqslant 1\end{array}\right.\\x-2\geqslant 3\\2x-5<25\end{cases}$$

2.* Системы линейных неравенств с одним неизвестным с модулями

Я постоянно держу в уме предмет своего исследования и терпеливо жду, пока первый проблеск мало-помалу обратится в полный и блестящий свет.

Исаак Ньютон (1643–1727),
английский физик, математик, астроном

Мы уже умеем решать системы линейных неравенств с одним неизвестным, а также системы уравнений с модулями. В седьмом классе мы познакомились с тем, как решать линейное неравенство с одним неизвестным, содержащее модули. Разберемся теперь с тем, как решать системы неравенств с модулями. Для этого рассмотрим вначале несколько примеров.

Пример 1.
Решить систему неравенств $\begin{cases} 2|x+3|+x>4 \\ x-3|2x+5|\leqslant -13 \end{cases}$.

Решение:

Решим данную систему неравенств по алгоритму, сформулированному нами в предыдущем пункте.

1. Решим первое неравенство системы $2|x+3|+x>4$. В нем содержится модуль выражения $x+3$. По определению модуля:

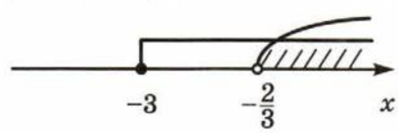
$$|x+3|=\begin{cases} x+3, \text{ если } x\geqslant -3 \\ -(x+3), \text{ если } x<-3 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

<u>*1 случай*</u>

Если $x\geqslant -3$, то $|x+3|=x+3$, значит, наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x\geqslant -3 \\ 2(x+3)+x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -3 \\ 3x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -3 \\ x>-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

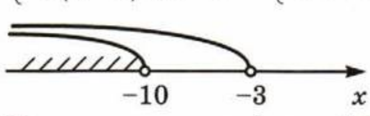


Подходят все $x\in\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

<u>*2 случай*</u>

Если $x<-3$, то $|x+3|=-(x+3)$, значит, наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x<-3 \\ -2(x+3)+x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ -x>10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x<-10 \end{cases}$$



Подходят все $x\in(-\infty;-10)$.

Решением неравенства $2|x+3|+x>4$ является объединение решений, полученных в обоих случаях:

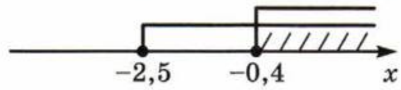
$x\in(-\infty;-10)\cup\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

2. Аналогично, решим второе неравенство системы $x - 3|2x + 5| \leqslant -13$.

<u>*1 случай*</u>

Если $x \geqslant -2{,}5$, то $|2x + 5| = 2x + 5$, значит, данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geqslant -2{,}5 \\ x - 3(2x+5) \leqslant -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2{,}5 \\ -5x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2{,}5 \\ x \geqslant -0{,}4 \end{cases}$$

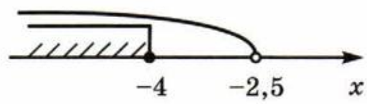


Подходят все $x \in [-0{,}4; +\infty)$.

<u>*2 случай*</u>

Если $x < -2{,}5$, то $|2x + 5| = -(2x + 5)$, значит, наше неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x < -2{,}5 \\ x + 3(2x+5) \leqslant -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2{,}5 \\ 7x \leqslant -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2{,}5 \\ x \leqslant -4 \end{cases}$$

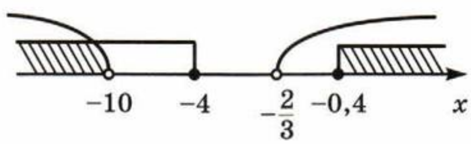


Подходят все $x \in (-\infty; -4]$.

Решением неравенства $x - 3|2x + 5| \leqslant -13$ является объединение решений, полученных в обоих случаях:

$$x \in (-\infty; -4] \cup [-0{,}4; +\infty)$$

3. Найдем теперь решение системы, пересекая полученные решения первого и второго неравенств:



Ответ: $x \in (-\infty; -10) \cup [-0{,}4; +\infty)$.

Итак, для решения систем неравенств с одним неизвестным с модулями можно применять *алгоритм решения системы неравенств, сформулированный нами ранее в пункте 2.2.1*. Однако на первом шаге этого алгоритма нам придется решать не просто линейные неравенства, а линейные неравенства *с модулями*. Остальные шаги алгоритма останутся теми же.

* * *

Системы указанного вида можно решать и способом, суть которого заключается в следующем. Вначале выделяются числовые промежутки, на которых все выражения под знаком модуля не меняют своего знака, затем данная система неравенств последовательно решается на каждом из выделенных промежутков. Решением исходной системы является объединение всех полученных решений.

Аналогичный способ мы использовали в 7 классе при решении неравенства с несколькими модулями. Применим его для решения системы $\begin{cases} 2|x+3| + x > 4 \\ x - 3|2x+5| \leqslant -13 \end{cases}$.

1. Выпишем выражения, находящиеся под знаком модуля в системе: $x + 3$; $2x + 5$.

2. Найдем корни уравнений:

$x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3$ $\qquad$ $2x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2{,}5$.

3. Определим непересекающиеся числовые промежутки, на которые числовая прямая разбивается этими корнями: $(-\infty; -3)$, $[-3; -2{,}5)$ и $[-2{,}5; +\infty)$.

4. Проверим, что объединение выделенных промежутков составляет всю числовую прямую.

$$(-\infty; -3) \cup [-3; -2{,}5) \cup [-2{,}5; +\infty) = (-\infty; +\infty)$$

5. На каждом из выделенных промежутков значения выражений $x + 3$ и $2x + 5$ не меняют своего знака. Так как коэффициенты при x положительные, то слева от соответствующего кор-

ня выражение принимает отрицательные значения (отметим это на схеме знаком «−»), а справа – положительные («+»). В зависимости от этого знака установим, как раскрывать модули в системе на каждом из найденных промежутков.

	$(-\infty; -3)$	-3	$[-3; -2{,}5)$	$-2{,}5$	$[-2{,}5; +\infty)$
$\lvert x+3 \rvert$	$- \Rightarrow -x-3$		$+ \Rightarrow x+3$		$+ \Rightarrow x+3$
$\lvert 2x+5 \rvert$	$- \Rightarrow -2x-5$		$- \Rightarrow -2x-5$		$+ \Rightarrow 2x+5$

6. Раскроем модули $|x+3|$ и $|2x+5|$ на этих промежутках. Тогда решение исходной системы сведется к решению трех систем без модулей и последующему отбору решений.

1) $x \in (-\infty; -3)$	$\begin{cases} 2(-x-3)+x>4 \\ x-3(-2x-5) \leqslant -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x>10 \\ 7x \leqslant -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-10 \\ x \leqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -10)$
2) $x \in [-3; -2{,}5)$	$\begin{cases} 2(x+3)+x>4 \\ x-3(-2x-5) \leqslant -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>-2 \\ 7x \leqslant -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3} \\ x \leqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$
3) $x \in [-2{,}5; +\infty)$	$\begin{cases} 2(x+3)+x>4 \\ x-3(2x+5) \leqslant -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>-2 \\ -5x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3} \\ x \geqslant -0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-0{,}4; +\infty)$

7. Отберем из найденных решений только те, которые принадлежат указанным промежуткам. Для этого найдем пересечение каждого множества решений с соответствующим ему числовым промежутком.

1) $(-\infty; -3) \cap (-\infty; -10) = (-\infty; -10)$
2) $[-3; -2{,}5) \cap \varnothing = \varnothing$
3) $[-2{,}5; +\infty) \cap [-0{,}4; +\infty) = [-0{,}4; +\infty)$

8. Решением исходной системы является объединение множеств решений, полученных на всех числовых промежутках: $x \in (-\infty; -10) \cup [-0{,}4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -10) \cup [-0{,}4; +\infty)$.

Приходим к следующему *алгоритму* решения систем неравенств с одним неизвестным.

Алгоритм решения простейших систем неравенств с одним неизвестным с модулями

1. Найти в системе неравенств все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из них к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля: самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или выражению, противоположному ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходную систему неравенств без знаков модуля.
7. Найти пересечение полученных множеств решений и соответствующих числовых промежутков.
8. В ответе записать объединение всех получившихся множеств решений.

Отметим, что системы более сложных неравенств с модулем решить при помощи этого алгоритма не так просто. Даже с одним неравенством бывает не очень легко справиться. Например, вот с таким:

$$||2x-1|-|3x+1|+4x|-5x<10.$$

А это еще не самое сложное линейное неравенство с модулем. Решение подобных неравенств требует большой аккуратности. Мы вернемся к ним в старших классах.

Системы линейных неравенств с одним неизвестным с модулями можно решать также с помощью графиков. Разберем графический способ их решения на конкретном примере, а затем построим общий алгоритм.

Пример 2.

Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x-1+|x|\geqslant 0 \\ |x-3|+|2x-2|-5<0 \end{cases}$.

Решение:

Можно заметить, что левые части неравенств системы задают кусочно-линейные функции: $y=2x-1+|x|$ и $y=|x-3|+|2x-2|-5$. Тогда решение неравенств сводится к поиску значений x, при которых эти функции принимают значения указанного в неравенстве знака.

1) Построим график функции $y=2x-1+|x|$. Для этого вначале упростим выражение в правой части равенства, используя определение модуля.

$x\geqslant 0 \;\Rightarrow\; |x|=x \;\Rightarrow\; 2x-1+|x|=2x-1+x=3x-1$

$x<0 \;\Rightarrow\; |x|=-x \;\Rightarrow\; 2x-1+|x|=2x-1-x=x-1$

Значит, мы можем записать данную функцию в виде $y=\begin{cases} 3x-1, \text{ если } x\geqslant 0 \\ x-1, \text{ если } x<0 \end{cases}$. Построим ее график (рис. 1).

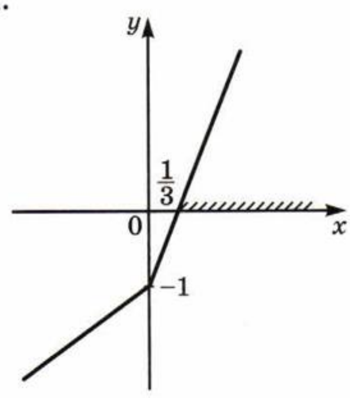


Рис. 1

Далее в соответствии со знаком неравенства укажем значения x, при которых эта функция неотрицательна. Для этого выберем ту часть графика, которая лежит выше оси Оx и пересекается с ней.

Этой части графика соответствует промежуток справа от точки пересечения графика функции $y=3x-1$ с осью Оx, включая саму эту точку. Вычислим ее точную абсциссу:

$$3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $2x-1+|x|\geqslant 0$ при $x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

2) Аналогично, построим график функции $y=|x-3|+|2x-2|-5$. Выделяя промежутки, на которых все выражения под знаком модуля не меняют своего знака, запишем данную функцию в виде

$y=\begin{cases} 3x-10, \text{ если } x\geqslant 3 \\ x-4, \text{ если } 1\leqslant x<3 \\ -3x, \text{ если } x<1 \end{cases}$ и построим ее график (рис. 2).

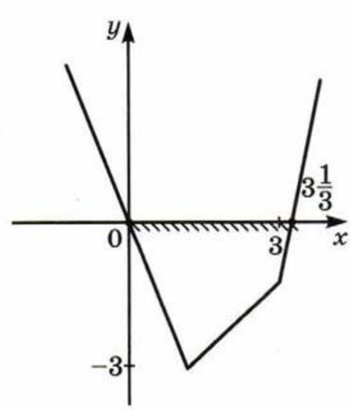


Рис. 2

Найдем абсциссы точек пересечения функции с осью Оx:

$$3x-10=0 \Leftrightarrow x=3\frac{1}{3}; \qquad -3x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Итак, график функции пересекает ось Оx в двух точках:

$x = 0$ и $x = 3\frac{1}{3}$.

Опираясь на рис. 2, находим, что $|x-3| + |2x-2| - 5 < 0$ при $x \in \left(0; 3\frac{1}{3}\right)$.

3) Решением системы является пересечение множеств решений двух данных неравенств:

$$\left[\frac{1}{3}; +\infty\right) \cap \left(0; 3\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}\right)$.

Сформулируем теперь общий *алгоритм* графического решения линейных неравенств с одним неизвестным с модулями. Для определенности, будем считать, что неизвестное обозначено x.

Алгоритм графического решения систем неравенств с одним неизвестным с модулями

1. Изобразить графическое решение каждого неравенства системы на координатной плоскости, выполнив шаги:
   1) Преобразовать неравенство так, чтобы справа от знака неравенства стоял ноль.
   2) Построить график кусочно-линейной функции, стоящей в левой части неравенства.
   3) Найти точки пересечения построенного графика с осью Оx.
   4) Указать объединение промежутков, где график располагается выше Оx или ниже Оx (соответственно знаку неравенства).
   5) Если неравенство нестрогое, включить в полученное множество точки пересечения графика с осью Оx.
2. Найти пересечение полученных множеств решений неравенств системы.

К **277** Решите неравенства с модулем:

а) $|x| - 1 > 0$; б) $|2x - 3| - 4 < 0$; в) $|3x - 1| - 2|x| > 5$.

278 Составьте систему из неравенств под буквами а и б предыдущего задания.

1) Чем отличается эта система неравенств от рассматриваемых в пункте 2.2.1? Вспомните, что является решением системы неравенств, и найдите его для полученной системы. Постройте общий способ решения подобных систем и сравните его с предложенным на стр. 100.

2) Можно ли воспользоваться идеей решения неравенства под буквой в предыдущего задания для решения систем неравенств? Выделите промежутки, на которых модули будут раскрываться однозначно, и решите систему. Предложите еще один способ решения систем неравенств и сравните его с алгоритмом на стр. 102.

3) Рассмотрите функции $y = |x| - 1$ и $y = |2x - 3| - 4$. Как графики этих функций могут помочь решить систему? Познакомьтесь с графическим способом решения систем неравенств, изложенным в учебнике, и решите систему.

279 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x+|x| \geqslant 1 \\ 2x-15<3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+|x-1|+3 \geqslant 5 \\ 2|x|-5>1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \big||3x+2|+|2x-1|-7 \leqslant 5x \\ 2|x-2|-3>5 \end{cases}$.

П **280** 1) Изобразите график функции $y = 2x + 4$. Вычислите, какое значение принимает функция при $x = 1$.
Возьмите несколько точек с абсциссой равной 1, лежащих ниже прямой $y = 2x + 4$, сравните их ординаты с полученным значением.
Возьмите несколько точек с абсциссой равной 1, лежащих выше прямой $y = 2x + 4$, сравните их ординаты с полученным значением.

2) Объясните, где будут находиться точки плоскости с координатами $(x; y)$, ординаты которых равны $2x + 4$, меньше $2x + 4$, больше $2x + 4$.
Проведите аналогичное исследование с графиком функции $y = -2x + 4$.

281 При каком значении параметра b график функции $y=-\dfrac{x}{4}+b$ проходит через точку $(1;1)$?

282 Из 80 девятиклассников школы 30 человек приняли участие в математической олимпиаде. Сколько процентов девятиклассников приняло участие в олимпиаде?

283 Не менее $\dfrac{139}{201}$ и не более $\dfrac{89}{123}$ участников математического кружка ходят на занятие по шахматам. Какое наименьшее число учеников может быть в таком кружке?

284 Разложите многочлен $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$ на множители.

285 Делится ли произведение $20^2 \cdot 27^3$ на:
а) 12; б) 15; в) 17; г) 18; д) 35; е) 36?

286 Определите, является ли число рациональным:
а) 0,123; б) 1,010010001; в) 3,03030303…;
г) 1,2(34); д) 3,03003000300003…; е) 2,525525525…
Если является, запишите его в виде обыкновенной дроби (результат можно не сокращать).

Д **287** Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x-|x|\leqslant 2 \\ 3x-1>5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x-|x+2|+1\geqslant 7 \\ 3|x|-10\leqslant 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \big||x+3|-|x-2|\big|+10\leqslant 3x \\ 3|x-3|-4<2 \end{cases}$.

288 1) Изобразите прямую, которая задается уравнением $x = 5$.
Возьмите несколько точек, лежащих левее прямой $x = 5$, сравните их абсциссы с $x = 5$.
Возьмите несколько точек, лежащих правее прямой $x = 5$, сравните их абсциссы с $x = 5$.

2) Объясните, где будут находиться точки плоскости с координатами $(x; y)$, абсциссы которых равны 5, меньше 5, больше 5.

289 При каком значении параметра k график функции $y = kx + 5$ проходит через точку $(7; 1)$?

290 В феврале завод уменьшил выпуск продукции на 10% по сравнению с январем. В марте вновь произошло уменьшение выпуска продукции на 20% по сравнению с февралем. Какой процент составляет продукция, выпущенная в марте, от продукции, выпущенной в январе?

291 Разложите многочлен $ab(b - a) + bc(b + c) - ac(a + c)$ на множители.

292 Делится ли произведение $12^3 \cdot 25^2$ на:

а) 24; б) 28; в) 32; г) 36; д) 40; е) 44?

293 Определите, является ли число рациональным:

а) 1,234; б) 1,020030004; в) 2,12121212...;
г) 4,(321); д) 1,23223222322223...; е) 9,87666666...

Если является, запишите его в виде обыкновенной дроби (результат можно не сокращать).

С **294*** Содержимое бака, полностью заполненного водой, разлили поровну в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объема, во втором бидоне вода заняла $\frac{2}{3}$, а в третьем бидоне – $\frac{3}{4}$ его объема. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объеме бака возможна такая ситуация? Ответ укажите в литрах.

3. Линейные неравенства с двумя неизвестными и их системы. Графическое изображение множества их решений

Алгебра – это лишь изображенная в символах геометрия, а геометрия – воплощенная в фигуре алгебра.

Софи Жермен (1776–1831),
французский математик и философ

В предыдущих пунктах мы научились решать линейные уравнения с двумя неизвестными и их системы. Новые алгоритмы расширили наши возможности по решению практических задач. В данном пункте аналогичным образом мы построим алгоритмы решения линейных неравенств с двумя неизвестными и их систем.

Вспомним задачу, которая привела нас к уравнению с двумя неизвестными.

Задача 1

Таня купила тетрадей на 100 р.: в линейку – по цене 5 р. и в клетку – по цене 9 р. Сколько тетрадей каждого вида купила Таня?

Решение этой задачи, как мы помним, свелось к решению уравнения $5x + 9y = 100$, где $x, y \in N$. Изменим условие задачи.

Задача 2

Тетрадь в линейку стоит 5 р., а в клетку – 9 р. Сколько тетрадей каждого вида может купить Таня, если она планирует потратить на покупку не более 100 р., и при этом купить хотя бы по одной тетради каждого вида?

Теперь задача сводится к неравенству с двумя неизвестными $5x + 9y \leqslant 100$, где $x, y \in N$. Подобные неравенства с двумя неизвестными встречаются при решении многих текстовых задач. Их можно записать в общем виде, поставив в левой части от знака неравенства выражение $ax + by + c$, а в правой – нуль. Исследуем эти неравенства и выведем общий способ их решения, но вначале уточним необходимые нам определения.

***Определение* 1. Линейным неравенством с двумя неизвестными** x и y называется неравенство одного из четырех видов:

$$ax + by + c > 0, \quad ax + by + c < 0, \quad ax + by + c \geqslant 0, \quad ax + by + c \leqslant 0,$$

где a, b, c – некоторые числа.

***Определение* 2. Решением** линейного неравенства с двумя неизвестными x и y называется пара чисел $(x; y)$, которая обращает его в верное числовое неравенство.

Например, пара чисел $(1; 2)$ является решением неравенства $5x + 9y \leqslant 100$, так как $5 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \leqslant 100$ – верное неравенство. А пара чисел $(10; 10)$, напротив, не является его решением, так как неравенство $5 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \leqslant 100$ – неверное.

Найти множество решений линейного неравенства с двумя неизвестными в некоторых случаях можно методом перебора. Например, для решения полученного выше неравенства $5x + 9y \leqslant 100$, где $x, y \in \mathrm{N}$, мы можем последовательно подставить вместо x все его возможные натуральные значения от 1 до 18 и для каждого случая установить соответствующие значения y. Так, при $x = 1$, $y \in \{1; 2; 3; ...10\}$, при $x = 2$, $y \in \{1; 2; 3; ...10\}$, при $x = 3$, $y \in \{1; 2; 3; ...9\}$, ... при $x = 17$, $y \in \{1\}$, при $x = 18$, $y \in \{1\}$. Всего данное неравенство имеет около сотни решений.

Однако возникает вопрос: как найти и описать множество решений неравенства с двумя неизвестными в случае, когда перебор невозможен? Для ответа на этот вопрос, как и для неравенств с одним неизвестным, удобно использовать графическое изображение, но теперь уже не на прямой, а на плоскости, поскольку пары чисел $(x; y)$ изображаются точками координатной плоскости. Тогда *графическим решением неравенства с двумя неизвестными* будут служить все точки координатной плоскости, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют этому неравенству.

Вначале изобразим множество решений неравенства $5x+9y \leqslant 100$, а затем на этой основе построим общий алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя неизвестными.

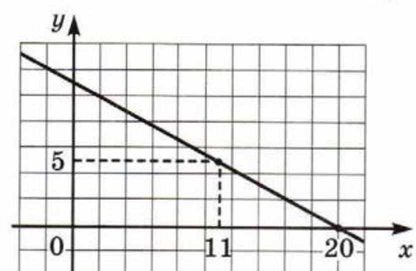


Рис. 1

Преобразуем неравенство $5x+9y \leqslant 100$ к виду $y \leqslant -\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$ и построим прямую $y=-\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$ по двум точкам: $(20; 0)$ и $(11; 5)$ (рис. 1).

Так как неравенство $y \leqslant -\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$ нестрогое, то множество его решений будет состоять, во-первых, из точек самой прямой $y=-\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$, а, во-вторых, из всех точек $(x; y)$ плоскости, ординаты которых меньше чем $-\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$. Эти точки, очевидно, находятся в нижней из полуплоскостей, на которые данная прямая разбивает координатную плоскость. Множество решений неравенства $y \leqslant -\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$ изображено на рис. 2.

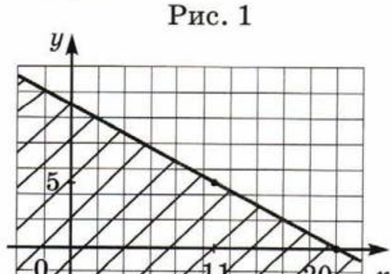


Рис. 2

* * *

Проведем аналогичные рассуждения общего характера. Мы знаем, что множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $ax + by + c = 0$, где числа a и b одновременно не обращаются в нуль, – прямая линия. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Покажем, что все точки одной из этих полуплоскостей удовлетворяют неравенству $ax + by + c > 0$, а другой – неравенству $ax + by + c < 0$.

Рассмотрим все возможные варианты в зависимости от значений b.

1) Если $b > 0$, то

$$ax+by+c>0 \Leftrightarrow y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \qquad ax+by+c<0 \Leftrightarrow y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

Значит, первому неравенству удовлетворяют все точки, лежащие выше прямой $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, а второму – точки, лежащие ниже этой прямой.

2) Если $b < 0$, то

$$ax+by+c>0 \Leftrightarrow y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \qquad ax+by+c<0 \Leftrightarrow y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

Следовательно, первому неравенству, наоборот, удовлетворяют все точки, лежащие ниже прямой $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, а второму – точки, лежащие выше этой прямой.

3) Если $b = 0$, то $a \neq 0$, и неравенства $ax + c > 0$ и $ax + c < 0$ задают полуплоскости, лежащие правее или левее (в зависимости от знака a) прямой $x=-\frac{c}{a}$.

В нестрогих неравенствах во всех трех случаях в множество решений включаются также точки прямой $ax + by + c = 0$.

Итак, для графического решения линейного неравенства с двумя неизвестными (с ненулевым коэффициентом при y) нужно вначале преобразовать исходное неравенство так, чтобы слева от знака неравенства осталось только неизвестное y. Получится одно из неравенств вида $y > kx + d$, $y \geqslant kx + d$, $y < kx + d$, $y \leqslant kx + d$. Затем надо построить прямую $y = kx + d$ и выбрать соответственно знаку неравенства одну из полуплоскостей, на которые прямая разбивает плоскость:

Вид неравенства	Графическое решение
$y > kx + d$	Все точки, расположенные *выше* прямой $y = kx + d$
$y \geqslant kx + d$	Все точки, расположенные *на прямой* $y = kx + d$ и *выше* нее
$y < kx + d$	Все точки, расположенные *ниже* прямой $y = kx + d$
$y \leqslant kx + d$	Все точки, расположенные *на прямой* $y = kx + d$ и *ниже* нее

Если же коэффициент при неизвестном y равен нулю, то после преобразования исходного неравенства к одному из неравенств вида $x > d$, $x \geqslant d$, $x < d$, $x \leqslant d$ нужно построить прямую $x = d$ и выбрать полуплоскость в соответствие со знаком неравенства:

Вид неравенства	Графическое решение
$x > d$	Все точки, расположенные *правее* прямой $x = d$
$x \geqslant d$	Все точки, расположенные *на прямой* $x = d$ и *правее* нее
$x < d$	Все точки, расположенные *левее* прямой $x = d$
$x \leqslant d$	Все точки, расположенные *на прямой* $y = x = d$ и *левее* нее

Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя неизвестными

1. Преобразовать неравенство так, чтобы слева от знака неравенства осталось только неизвестное y. Если это невозможно, то оставить слева только неизвестное x.
2. Заменить знак неравенства знаком равенства и построить прямую, задаваемую полученным уравнением.
3. Выделить часть плоскости в соответствии со знаком полученного неравенства.

Пример 1.

Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенств:

$2x - 3y + 1 > 0$; $-3x + y + 2 \geqslant 0$; $3x - 4 < 0$.

Решение:

1. Преобразуем неравенства к виду:

$y < \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$; $y \geqslant 3x - 2$; $x < 1\frac{1}{3}$.

2. Построим на координатной плоскости прямые линии:

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$; $y = 3x - 2$; $x = 1\frac{1}{3}$.

3. Выберем части плоскости, образованные этими прямыми, в соответствии со знаками полученных неравенств: для первого неравенства – нижняя полуплоскость, для второго – верхняя, а для третьего – слева от прямой. В случае, когда точки прямой не принадлежат искомому множеству, изобразим ее пунктирной линией (рис. 3).

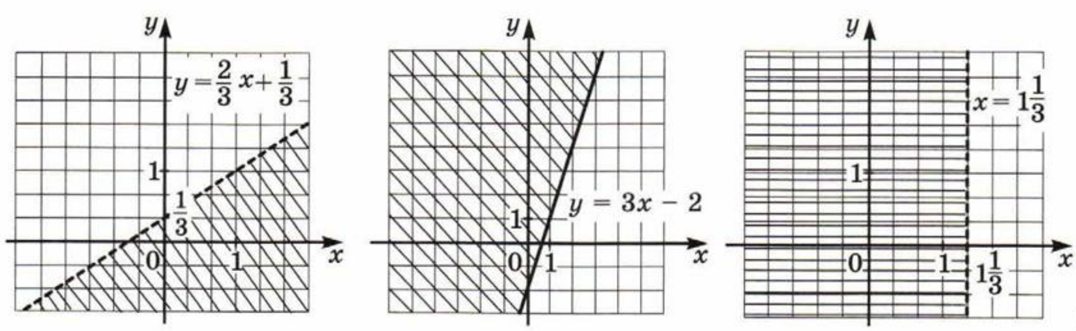


Рис. 3

* * *

Вернемся к задаче 1 и изменим ее условие еще раз. Мы уже ограничивали стоимость покупки, теперь ограничим и количество тетрадей, которые должна купить Таня.

Задача 3.

Тане нужно купить не меньше 16 тетрадей, потратив на покупку не более 100 р., *и при этом купить хотя бы по одной тетради каждого вида*. Сколько и каких тетрадей она может купить, если в продаже имеются тетради в линейку по 5 р. и в клетку по 9 р.?

Решение:

Данная задача сводится к системе неравенств с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x + 9y \leqslant 100 \\ x + y \geqslant 16 \end{cases} \rightarrow x = ?\ \ y = ?, \text{ где } x, y \in N.$$

Решением данной системы является пересечение множеств решений каждого из неравенств.

Множеством решений неравенства $5x+9y\leqslant 100$ является нижняя полуплоскость, ограниченная прямой $y=-\frac{5x}{9}+11\frac{1}{9}$, а множеством решений неравенства $x+y\geqslant 16$ – верхняя полуплоскость, ограниченная прямой $y = -x + 16$. Пересечением этих полуплоскостей будет угол, все точки которого лежат ниже первой прямой и выше второй (рис. 4).

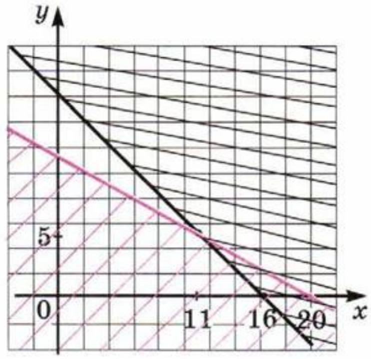


Рис. 4

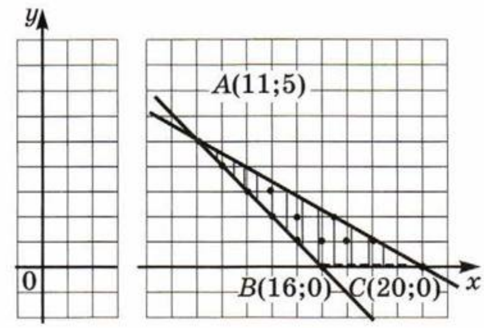


Рис. 5

Чтобы ответить на вопрос задачи 3, надо из полученного множества точек выбрать точки с натуральными координатами. Эту задачу можно свести к нахождению всех пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе из четырех неравенств:

$$\begin{cases} 5x+9y\leqslant 100 \\ x+y\geqslant 16 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

Пересечением четырех полуплоскостей будут все точки треугольника с вершинами A (11; 5), B (16; 0) и C (20; 0), за исключением его стороны BC. Тогда множеством решений задачи будут 11 пар целых координат точек этого треугольника ABC, отмеченных на увеличенном фрагменте рисунка 3 (рис. 5).

Ответ: количество тетрадей, которые сможет купить Таня, указаны в таблице:

В линейку	11	12	13	14	14	15	15	16	16	17	18
В клетку	5	4	3	3	2	2	1	2	1	1	1
Всего	16	16	16	17	16	17	16	18	17	18	19

По найденному графическому решению удобно отобрать наибольшие значения неизвестных. Так, при заданных в условии ограничениях Таня сможет купить максимум 18 тетрадей в линейку (тогда других 1) или максимум 5 тетрадей в клетку (тогда других 11). Наибольшее значение общего количества тетрадей, которые можно купить, равно 19.

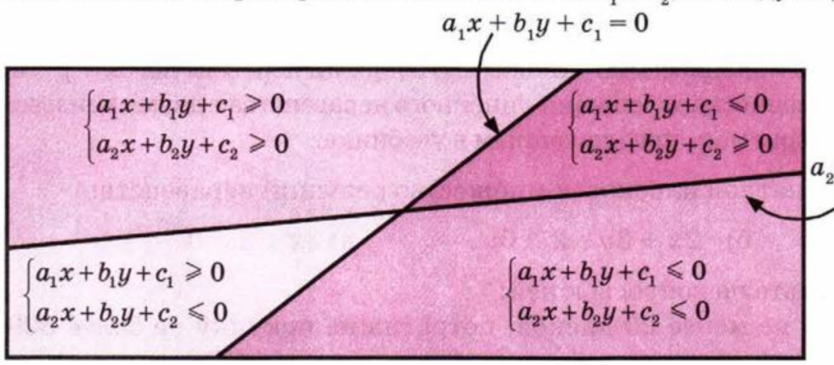
Подобные задачи о нахождении наибольшего или наименьшего значения некоторой функции называют экстремальными. Они имеют существенное прикладное значение. Важным, например, является умение находить максимальное значение той или иной величины (например, количества) при наименьших значениях другой (например, стоимости).

Теорией и методам решения экстремальных задач на множествах, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств, занимается одна из важнейших областей прикладной математики – *линейное программирование*.

Подобным образом можно описать множество решений любой системы линейных неравенств. Действительно, пусть $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – уравнения прямых на плоскости. Если эти прямые пересекаются, то они образуют две пары вертикальных углов. Каждый из этих четырех углов задается одной из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \geqslant 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \geqslant 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \leqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \leqslant 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \leqslant 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \leqslant 0 \end{cases}.$$

Покажем это, например, для положительных b_1 и b_2, на следующей схеме:



Если прямые, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, параллельны, то пересечение двух полуплоскостей, каждая из которых задается одной из этих прямых, может быть либо полосой, либо одной из данных полуплоскостей, либо пустым множеством.

Пример 2.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x-y+2 \geqslant 0 \\ 4x-2y \leqslant 2 \end{cases}$$

Решение:

Упростим неравенства системы, выполнив равносильные преобразования:

$$\begin{cases} 2x-y+2 \geqslant 0 \\ 4x-2y-2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant 2x+2 \\ y \geqslant 2x-1 \end{cases}$$

Решением первого неравенства полученной системы будет множество точек, лежащих на прямой $y = 2x + 2$ и ниже нее. Решением второго неравенства будет множество точек, лежащих на прямой $y = 2x - 1$ и выше нее. Множество решений данной системы неравенств – полоса между параллельными прямыми $y = 2x + 2$ и $y = 2x - 1$, включая точки прямых (рис. 6).

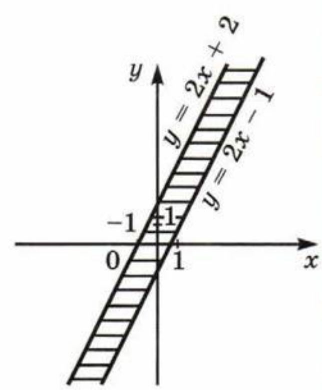


Рис. 6

295 Выберите из данных записей линейные неравенства с двумя неизвестными:

а) $3x + 4y = 5$; б) $3x + 4y < -5$; в) $3x - 4y - 5 > 0$; г) $3xy - 4x^2 \leqslant 5$.

Решением какого из выбранных неравенств является пара чисел $x = 1$ и $y = -1$?

296 Изобразите прямую, заданную равенством $y = 2x + 2$. Где будут располагаться точки плоскости с координатами $(x; y)$, заданные неравенством:

а) $y > 2x + 2$; б) $y \geqslant 2x + 2$; в) $y < 2x + 2$; г) $y \leqslant 2x + 2$?

Можно ли провести аналогичные рассуждения для графического решения любого линейного неравенства с двумя неизвестными? Дополните таблицу:

Вид соотношения	Графическое решение
$y = kx + d$	Все точки, расположенные на прямой $y = kx + d$
$y > kx + d$	
$y \geqslant kx + d$	
$y < kx + d$	
$y \leqslant kx + d$	

297 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства $3x + y - 6 > 0$. Составьте алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя неизвестными и сравните его с алгоритмом, предложенным в учебнике.

298 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенств:

а) $3x - 2y + 7 > 0$; б) $-2x + 3y - 2 \geqslant 0$; в) $2x + 3 > 0$.

299 Решите задачу и ответьте на вопросы к ней:
«Егору нужно купить не менее 20 дисков, потратив на покупку не более 500 рублей. Сколько и каких дисков он сможет купить, если цена *CD* диска составляет 20 рублей, а цена *DVD* диска – 30 рублей?»

1) Что получено в качестве математической модели этой задачи? Какие шаги вы предпринимали, чтобы найти ее решение?

2) Составьте алгоритм решения системы линейных неравенств с двумя неизвестными, выбрав из следующих шагов необходимые:

Найти пересечение полученных решений неравенств системы.

Изобразить на координатной плоскости графическое решение каждого неравенства системы.

Найти объединение полученных решений неравенств системы.

При необходимости уточнить координаты точек, описывающих полученное решение системы.

300 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geqslant 0 \\ x - 3y + 6 \leqslant 0 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geqslant 0 \\ 2x - 4y - 2 \leqslant 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x - 3y + 6 \geqslant 0 \\ -x + 2y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geqslant 0 \\ 2x - 4y - 8 \leqslant 0 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x - 2y - 1 \geqslant 0 \\ 2x - 4y - 1 \leqslant 0 \end{cases}$.

П **301** На рулоне обоев указано, что длина обоев в рулоне равна 10±0,1 м. Какую из указанных ниже длин не может иметь рулон?

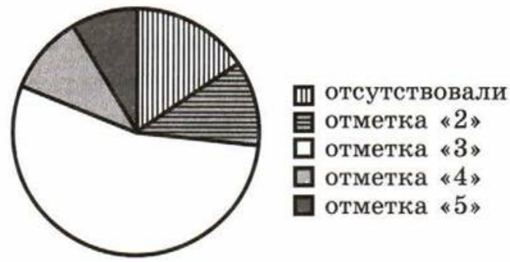
а) 9,95 м; б) 10,05 м; в) 10 м; г) 9,87 м.

302 Для строительства дачи можно использовать один из трех вариантов фундамента: каменный, бетонный и фундамент из пеноблоков. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн камня и 9 мешков цемента. Для фундамента из пеноблоков необходимо 5 кубометров пеноблоков. Для бетонного фундамента необходимо

12 тонн щебня и 34 мешка цемента. Тонна камня стоит 2100 рублей, кубометр пеноблоков стоит 2500 рублей, щебень стоит 630 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 200 рублей. Сколько рублей придется заплатить за самый дешевый фундамент?

303 Прямая проходит через точки (−1; 2) и (2; − 4). Найдите ее угловой коэффициент.

304 На круговой диаграмме показаны результаты контрольной работы за первую четверть в восьмых классах. Сколько примерно учащихся получили отметку не ниже тройки, если всего в школе 80 восьмиклассников?



- более 70 учащихся;
- около 60 учащихся;
- около 50 учащихся;
- менее 40 учащихся.

305 Докажите утверждения:

а) Если натуральное число a не делится на 3, то число $5a$ не делится на 3.
б) Если натуральное число b делится на 5, то число $2b$ делится на 10.
в) Если число $3c$ делится на 5 (где c – натуральное), то число c делится на 5.
г) Если число $15d$ делится на 9 (где d – натуральное), то число d может не делиться на 9.

306 Какой цифрой оканчиваются числа:

а) 2^{345}; б) 3^{4567}; в) 9^{8^7} ?

Д **307** Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенств:

а) $2x - 3y + 12 < 0$; б) $-3x + 5y - 15 \geqslant 0$; в) $3y - 9 > 0$.

308 Для похода Тане нужно купить не менее 20 банок консервов, потратив на покупку не более 1000 рублей. Сколько и каких консервов она может купить, если в продаже имеются консервы с тушенкой по цене 47 рублей и рыбные консервы по цене 53 рубля?

309 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-y \geqslant 0 \\ x+2y \leqslant 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x-5-10 \geqslant 0 \\ 3x-y+6 \leqslant 0 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 3x+y-1 \geqslant 0 \\ 6x+2y-2 \leqslant 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x-5y+10 \geqslant 0 \\ -2x+3y-18 \leqslant 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x+y-1 \geqslant 0 \\ 6x+2y-10 \leqslant 0 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x+y-1 \geqslant 0 \\ 6x+2y-1 \leqslant 0 \end{cases}$.

310 Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Известно, что поставщик А требует 3500 рублей за кубический метр бруса, и его стоимость доставки составляет 9900 рублей. Поставщик Б требует 4500 рублей за кубометр бруса, стоимость доставки составляет 7900 рублей, но доставка бесплатна, если стоимость заказа превышает 150 000 рублей. Поставщик В назначил плату 3600 рублей за один кубометр бруса, его стоимость доставки составляет 7900 рублей, и доставка бесплатна в случае, если стоимость заказа превышает 200 000 рублей. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)?

311 Докажите утверждения:

а) Если натуральное число a не делится на 11, то число $7a$ не делится на 11.
б) Если натуральное число b делится на 7, то число $3b$ делится на 21.

в) Если число $5c$ делится на 3 (где c – натуральное), то число c делится на 3.
г) Если число $225d$ делится на 15 (где d – натуральное), то число d может не делиться на 15.

312 Какой цифрой оканчиваются числа:

а) 7^7; б) 7^{100}; в) 7^{7^7}?

C **313*** От двух кусков сплавов (с различным содержанием свинца) массой в 6 и 12 килограмм отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

4.* Системы линейных неравенств с двумя неизвестными с модулями

Возможно, не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны... без аналогии.

Пойа Дьёрдь (1887–1985),
венгерский и американский математик

В предыдущих пунктах мы научились решать линейные неравенства с одним и двумя неизвестными, их системы, познакомились с графическим решением линейных неравенств с одним неизвестным с модулем. Использование графиков помогает и в решении систем линейных неравенств с модулями *с двумя неизвестными*. Как и раньше, выведем общий алгоритм их решения, основываясь на конкретном примере.

Пример 1.
Решить систему неравенств $\begin{cases} |x+3|+y<4 \\ x-|2y+4|\geqslant -5 \end{cases}$.

Решение:

Найдем графическое решение первого неравенства $|x+3|+y<4$.

<u>1 случай</u>

Если $x+3\geqslant 0$, то $|x+3|=x+3$, значит, данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x\geqslant -3 \\ x+3+y<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -3 \\ y<-x+1 \end{cases}$$

Следовательно, множество решений неравенства составляет пересечение полуплоскостей, лежащих справа от прямой $x=-3$, включая точки самой прямой, и ниже прямой $y=-x+1$ без точек этой прямой (рис. 1).

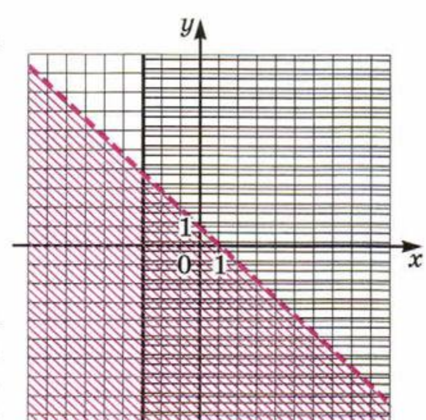


Рис. 1

<u>*2 случай*</u>

Если $x + 3 < 0$, то $|x + 3| = -(x + 3)$, значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x < -3 \\ -(x+3) + y < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ y < x + 7 \end{cases}$$

Множеством решений неравенства является пересечение полуплоскостей, лежащих слева от прямой $x = -3$ и ниже прямой $y = x + 7$, без точек этих прямых (рис. 2).

Решением неравенства $|x + 3| + y < 4$ является объединение двух рассмотренных случаев (рис. 3). При этом граница полученного множества в решение не входит в силу того, что неравенство нестрогое.

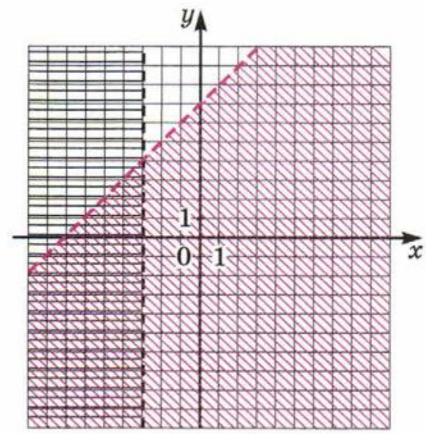


Рис. 2

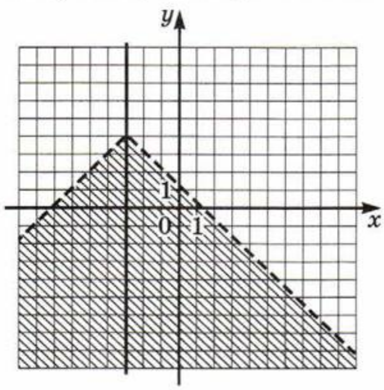


Рис. 3

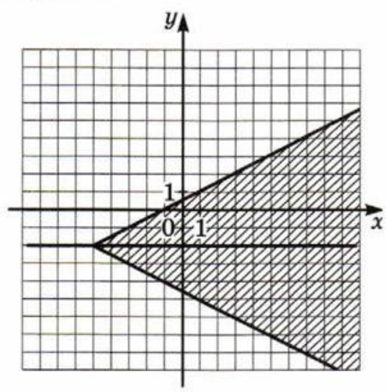


Рис. 4

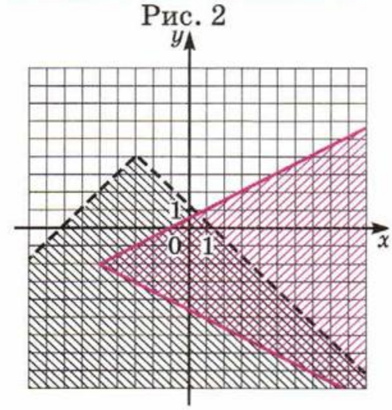


Рис. 5

Аналогично получаем графическое решение второго неравенства (рис. 4), которому, в отличие от предыдущего случая, граница принадлежит.

Чтобы определить решение исходной системы, надо найти пересечение множеств решений первого и второго неравенств, изображенных на рисунках 3 и 4. В пересечении получим треугольник (рис. 5). Одна из вершин треугольника не уместилась на рисунке из-за выбранного масштаба.

Для точной записи ответа нужно еще найти вершины получившегося треугольника. Каждая из этих вершин является точкой пересечения каких-то двух из трех прямых: $x + 2y = -9$, $x - 2y = -1$, $x + y = 1$. Поэтому требуется решить три системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = -9 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ y = 0{,}5x + 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = -9 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -10 \\ x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -10 \\ x = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Ответ: треугольник с вершинами $A(-5; -2)$, $B(11; -10)$ и $C\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$, без стороны BC (рис. 6).

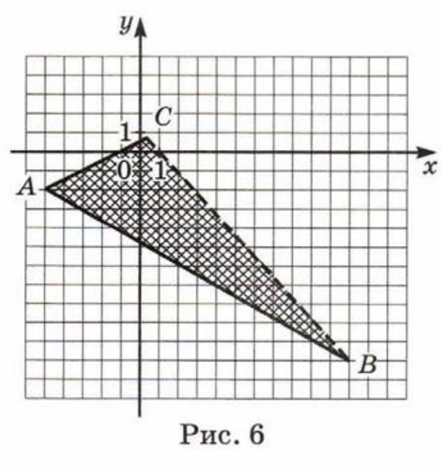


Рис. 6

Теперь мы можем записать общий алгоритм графического решения для неравенств с модулями с двумя неизвестными.

Алгоритм графического решения систем неравенств с модулями с двумя неизвестными

1. Изобразить на координатной плоскости графическое решение каждого неравенства системы, выполнив шаги:
   1) «Раскрыть» модули, используя определение модуля.
   2) Изобразить графическое решение неравенства для каждого выделенного случая.
   3) Отобрать только те решения, которые удовлетворяют выделенному случаю.
   4) Найти объединение графических решений, полученных в каждом случае.
2. Найти пересечение полученных решений неравенств системы, уточнив при необходимости координаты точек, описывающих данное решение.

Пример 2.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} -x-|y|\geqslant 2 \\ \big||-y|-3|x-1|\big|>0 \end{cases}$$

Решение:

1. Изобразим на координатной плоскости решение неравенства $-x-|y|\geqslant 2$. Для этого раскроем модуль, используя определение модуля.

1 случай. Если $y\geqslant 0$, то $|y|=y$, значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} y\geqslant 0 \\ -x-y\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0 \\ -y\geqslant 2+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0 \\ y\leqslant -x-2 \end{cases}.$$

Графическое решение полученной системы изобразим на рис. 7.

2 случай. Если $y<0$, то $|y|=-y$, значит, неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} y<0 \\ -x+y\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ y\geqslant x+2 \end{cases}.$$

Графическое решение полученной системы изобразим на рис. 8.

Укажем объединение множеств решений, полученных в обоих случаях (рис. 9).

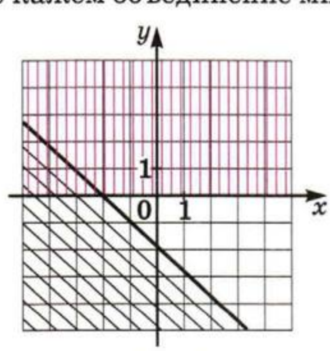


Рис. 7

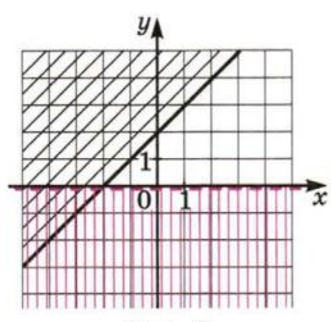


Рис. 8

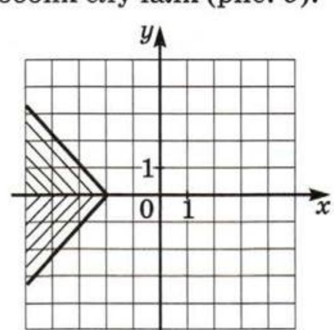


Рис. 9

2. Изобразим на координатной плоскости решение неравенства

$$|-y|-3|x-1|>0.$$

Чтобы раскрыть модули, нам надо рассмотреть в данном случае четыре возможных варианта сочетания знаков выражений под знаком модуля:

1) $x-1 \geqslant 0,\ -y \geqslant 0$; 3) $x-1<0,\ -y \geqslant 0$;

2) $x-1 \geqslant 0,\ -y<0$; 4) $x-1<0,\ -y<0$.

Однако, понимая, что на последнем этапе решения системы нам нужно будет найти пересечение искомого множества решений с множеством решений первого неравенства системы, делаем вывод, что первые два случая, где $x \geqslant 1$, рассматривать не имеет смысла.

Если $x-1<0,\ -y \geqslant 0$, то исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ -y \geqslant 0 \\ -y+3(x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ y \leqslant 0 \\ -y>-3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ y \leqslant 0 \\ y<3x-3 \end{cases}.$$

Множество решений системы представляет собой заштрихованный на рис. 10 угол, образованный прямыми $y=3x-3$ и $x=1$.

Если $x-1<0,\ -y<0$, то исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ -y<0 \\ y+3(x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ y>0 \\ y>-3x+3 \end{cases}.$$

Множество решений системы представляет собой заштрихованный на рис. 11 угол, образованный прямыми $y=-3x+3$ и $x=1$.

Укажем объединение полученных в обоих случаях решений на рис. 12.

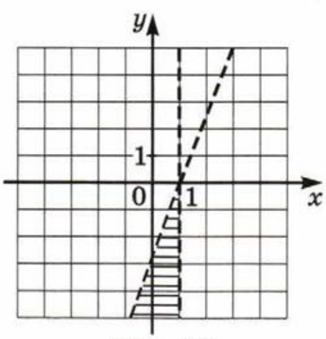


Рис. 10

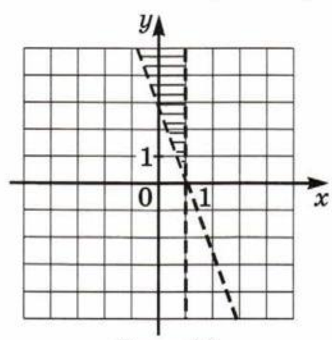


Рис. 11

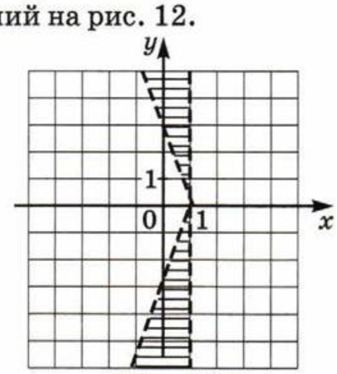


Рис. 12

3. Чтобы определить решение исходной системы, найдем пересечение множеств решений первого и второго неравенств, изображенных на рисунках 9 и 12.

Эти множества не имеют общих точек, значит, система не имеет решений (рис. 13).

Ответ: $\varnothing$.

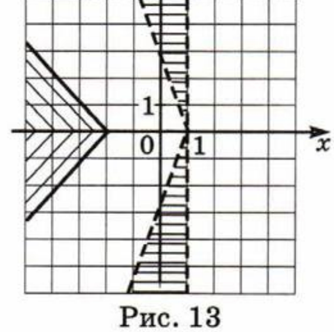


Рис. 13

Пример 3.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x-|2y+x| \geqslant 2 \\ |x|+0{,}5|1-y| \leqslant -1 \end{cases}.$$

Решение:

Можно заметить, что во втором неравенстве системы каждое из слагаемых в левой части неотрицательно: $|x| \geqslant 0$ и

$0{,}5|1-y| \geqslant 0$. Поэтому и их сумма тоже неотрицательна, и неравенство $|x|+0{,}5|1-y| \leqslant -1$ не может иметь места. Значит, система не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

Приведенные примеры показали, что особенности конкретной системы иногда помогают избежать громоздкого решения. Поэтому прежде чем применять построенный нами алгоритм, нужно проанализировать систему неравенств и попробовать упростить ее решение.

314 Рассмотрите неравенства: $x+y<1$ и $x+|y|<1$. Что у них общего, чем они отличаются? Найдите графическое решение неравенств.

315 1) Изобразите графическое решение обоих неравенств на одной координатной плоскости:

а) $|x|+y<2$; б) $x-|2y| \leqslant 1$.

2) Укажите пересечение полученных множеств решений этих неравенств.

3) Объясните, как найти решение системы $\begin{cases} |x|+y<2 \\ x-|2y| \leqslant 1 \end{cases}$.

316 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-|y|<6 \\ 3x+|y+2|>3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x+3|-y>4 \\ |x+1|-2y \geqslant 3 \end{cases}$.

317 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x-|y+x| \geqslant 1 \\ |x|+5|1-y| \leqslant 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-|y-1|>-2 \\ |x|-|2y+4|<6 \end{cases}$.

318 При каком значении a площадь фигуры, которая является решением системы неравенств $\begin{cases} |x|+|y| \leqslant 4 \\ x-y \geqslant a \end{cases}$, будет равна 2?

319 Запишите математическую модель задачи, обозначив скорость первого автомобиля – x км/ч., а второго – y км/ч.

Скорости двух автомобилей отличаются не более чем на 10 км/ч. Если автомобили выедут навстречу друг другу из городов, расстояние между которыми 300 км, то они встретятся не позже чем через 2 часа. С какой скоростью должны двигаться автомобили?

320 Стоимость проезда в пригородном электропоезде составляет 144 рубля. Школьникам предоставляется скидка в 50%. Сколько рублей стоит проезд группы из 4 взрослых и 12 школьников?

321 На координатной прямой отмечено число a. Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

а) $2a-15>0$; в) $11-2a<0$; д) $a-8>0$;

б) $4-a>0$; г) $7-a<0$; е) $19-3a<0$.

322 Сколько зубцов имеет колесо зубчатой передачи, если дуга окружности этого колеса, заключенная между двумя соседними зубцами, равна 12°?

323 Упростите выражение $\frac{ab}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$ и найдите его значение при $a = 1{,}25$, $b = \frac{1}{8}$.

324 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{7}{13}$; б) $-\frac{4}{9}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $-\frac{7}{18}$; д) $\frac{2}{33}$; е) $-\frac{7}{17}$.

D **325** Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) 1,(2); б) −12,(34); в) −1,(3); г) 3,0(12).

326 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - |y| > 1 \\ |x| + 3y \leqslant 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x| + |y+1| > 2 \\ |2x+1| - y < 7 \end{cases}$.

327 Решите задачу, составив систему неравенств.
В школе три восьмых класса. В них количество мальчиков и количество девочек отличается не больше чем на 3. А всего в восьмых классах учится не меньше 75 и не больше 80 детей. Сколько мальчиков и сколько девочек учится в восьмых классах этой школы?

328 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{25}{9}$; в) $-\frac{5}{12}$; г) $\frac{5}{18}$; д) $\frac{13}{99}$; е) $\frac{1}{7}$.

329 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

а) −0,(2); б) −1,2(3); в) 1,(56); г) 12,34(56).

C **330*** Докажите, что если $a + b + c + d > 0$, $a > c$, $b > d$, то $|a + b| > |c + d|$.

Экспресс-тест № 3

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{3x+5}{2} \leqslant \frac{2x+3}{3}, \\ \frac{x-2}{3} > \frac{x-3}{2} \end{cases}$.

А) $(-\infty; 1{,}8]$; Б) $(-\infty; 1{,}8)$; В) $(-\infty; -1{,}8]$; Г) $\varnothing$.

№ 2

№2. Сколько целочисленных решений имеет двойное неравенство

$$-1 \leqslant 3 - 0{,}5x < 2.$$

А) Бесконечно много решений; Б) 7; В) 6; Г) 0.

№ 3

№3. Решите систему неравенств с модулем $\begin{cases} 2|x| - 5 \geq x \\ -3 < 2x + 6 < 19 \end{cases}$.

А) $\left(-4{,}5; -1\frac{2}{3}\right] \cup [5; 6{,}5)$; Б) $\left(-4{,}5, -1\frac{2}{3}\right) \cup (5; 6{,}5)$ В) $\varnothing$; Г) $[5; 6{,}5)$.

№ 4

№4. Найдите решение системы неравенств $\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1) < \frac{3}{4}(4-x) \\ 2-x \geqslant 2x-8 \\ 5x+3{,}5 > 2{,}5x+1 \end{cases}$

А) $\left(-1; 3\frac{1}{3}\right)$; Б) $\left(-1; 3\frac{1}{3}\right]$; В) $\left(-1; 3\frac{1}{4}\right)$; Г) $\left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right]$.

№ 5			
1	2	3	4

№5. Установите соответствие между неравенством с двумя неизвестными и рисунком его графика.

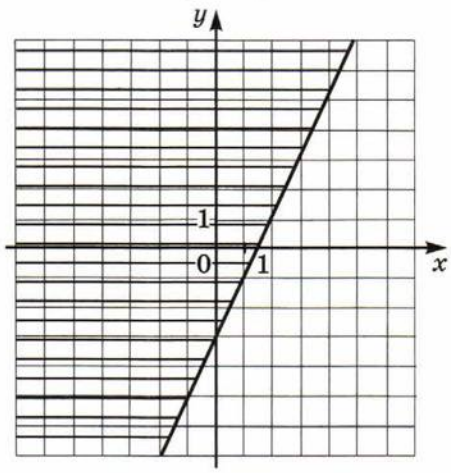
1) $2x + 5y - 15 < 0$;

2) $-7x + 3{,}5y + 10{,}5 \geqslant 0$;

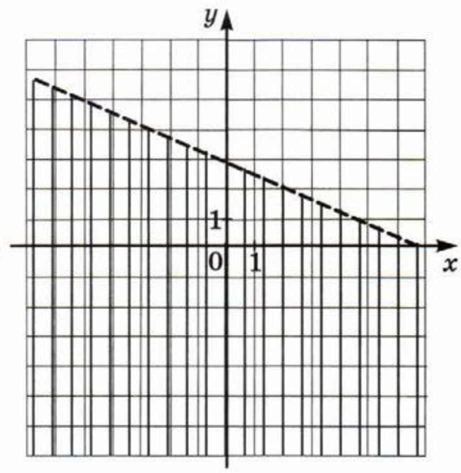
3) $-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - 3 \geqslant 0$;

4) $5x + 2y - 4 < 0$.

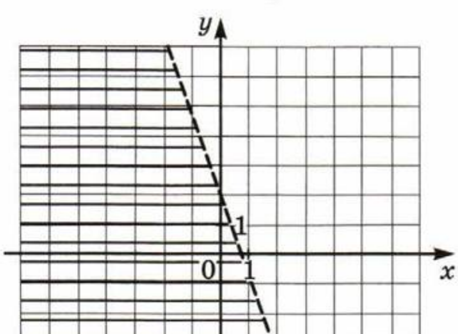
А)



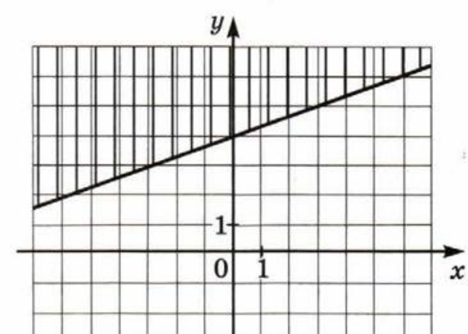
Б)



В)



Г)



Часть В

№ 6

№6. Решив совокупность неравенств, выберите наименьшее целочисленное решение $\left[\begin{array}{l} (x-5)^2 \leqslant (x+3)^2 \\ 5x+12 > 4x-9 \end{array}\right.$.

А) -21; Б) -20; В) нельзя определить; Г) 0.

№ 7

№7. Определите решение совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x>15\\ 5-x<12\end{cases}\\ \begin{cases}6(x-\frac{2}{3})+4<8x+1\\ 13x-5(x-1)>6(2+x)+3\end{cases}\end{array}\right.$$

А) $\varnothing$; Б) $(-7,5;\ -2,5)\cup(5;\ +\infty)$; В) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; Г) $(5;\ +\infty)$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№8. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}2x-|4x-1|+1\geqslant -2\\ 5|x|-4\leqslant 3\end{cases}.$$

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5				№ 6	№ 7
				1	*2*	*3*	*4*		
В	*В*	*А*	*В*	*Б*	*А*	*Г*	*В*	*Б*	*Г*

№ 8

1) $\begin{cases}4x-1\geqslant 0\\ 2x-4x+1+1\geqslant -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{1}{4}\\ x\leqslant 2\end{cases}$ или $\begin{cases}4x-1<0\\ 2x+4x-1+1\geqslant -2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{4}\\ x\geqslant-\frac{1}{3}\end{cases}$

Решением первого неравенства является числовой промежуток

$$\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{4};2\right]=\left[-\frac{1}{3};2\right]$$

2) $\begin{cases}x\geqslant 0\\ 5x-4\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\leqslant 1,4\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0\\ -5x-4\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1,4\end{cases}$

Решением второго неравенства является числовой промежуток

$$[-1,4;\ 0)\cup[0;\ 1,4]=[-1,4;\ 1,4]$$

3) Итак, решением исходной системы будет пересечение двух найденных числовых промежутков

$$\left[-\frac{1}{3};2\right]\cap\left[-1,4;1,4\right]=\left[-\frac{1}{3};1,4\right]$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};1,4\right]$.

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично*
7–8 баллов – *хорошо*
5–6 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к Главе 2

331 Найдите общее решение каждого уравнения:

а) $\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}y=16$; в) $5x + 4y = 0$; д) $\frac{13}{15}x-0y=39$;

б) $2x + 5y - 12 = 0{,}2 \cdot (5x - 75)$; г) $0x - 3y = 9$; е) $0x + 0y = 19$.

332 Является ли пара (2; 2) чисел решением уравнения:

а) $\frac{3}{2}x+y-3=0$; б) $\frac{1}{2}x-y+1=0$.

Запишите по два решения для каждого из этих уравнений.

333 График уравнения $\frac{3}{8}x-y+m=0$; проходит через точку (16; 4). Найдите значение m.

334 Графики каких уравнений имеют общую точку (1; −3):

а) $-5x + y + 8 = 0$; б) $-5x + y - 13 = 0$; в) $-3x + y = 0$.

335 Постройте график уравнения:

а) $2x + y = 1$; б) $\frac{3}{4}x-y-6=0$; ; в) $-3x + 0y = 9$; г) $\frac{2}{3}y-0x+4=0$.

336 Переведите условие задачи на математический язык:

а) Бассейн объемом 480 м³ наполнялся водой поочередно из двух труб. Скорость наполнения бассейна из первой трубы 80 м³/ч, – из второй трубы 60 м³/ч. Сколько времени была открыта первая труба, а потом – вторая?

б) В поход вышли 48 туристов. Сколько трехместных и пятиместных палаток им потребовалось взять с собой, чтобы разместиться всем?

в) Моторная лодка шла по течению реки 2 часа, а против течения 3 часа. Какова собственная скорость лодки и скорость течения реки?

337 Найдите сумму абсциссы и ординаты точки пересечения графиков уравнений:

$-2x - y + 8 = 0$ и $-\frac{3}{4}x-y+3=0$.

338 Какая из пар чисел (1; −1), (−1; 1), (2; 1), (1; 2) является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=3\\x+y=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x-2y=-3\\x+y=0\end{cases}$.

339 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}-3x+y=2\\x-3y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y=1-7x\\x+3y=7\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x-y=-11\\\frac{x-1}{2}+\frac{y}{3}=2\end{cases}$;

г) $\begin{cases}\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}y=1\\0{,}3x-0{,}2y=1{,}2\end{cases}$; д) $\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}y=17\\0{,}8x-1{,}8y=17\end{cases}$.

340 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+|y|=2\\3x+|y|=4\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+2y=2\\|2x-3y|=1\end{cases}$; в) $\begin{cases}2|x|+3y=8\\2x-|y|=-4\end{cases}$; г)* $\begin{cases}|x-1|+y=4\\x-|y-2|=3\end{cases}$.

341 Решите задачу, составив систему уравнений:

а) Легковой и грузовой автомобили проезжают расстояние между двумя селами соответственно за 3 ч и 5 ч. Определите их скорости, если скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше скорости грузового.

б) Участвуя в соревнованиях по теннису, две команды забили 41 мяч. Каждый участник из первой команды забил по 3 мяча, а каждый из второй – по 4 мяча. Сколько ребят было в каждой команде, если в первой команде на два участника больше, чем во второй?

в) Один раствор содержит 20% (по объему) соляной кислоты, а второй – 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50%-ного раствора соляной кислоты?

г) Сумма цифр числа равна 15. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

д) Сумма двух чисел равна 128, а их разность составляет 75% от их суммы. Найдите эти числа.

е*) От турбазы до озера 8 км. Дорога сначала идет в гору, затем по лесу, потом под гору. До озера туристы шли 1ч 27 мин, а обратно 1ч 51 мин. Скорость их в гору 4 км/ч, лесом 5 км/ч, а под гору – 6 км/ч. Сколько километров туристы шли лесом в одном направлении?

342 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}5x+8>0\\2x-1>0\end{cases}$; б) $\begin{cases}12x-4<0\\18-3x\leqslant 0\end{cases}$; в) $\begin{cases}3x-16\leqslant 0\\-7x-28<0\end{cases}$;

г) $\begin{cases}5(x+1)-3(x-7)-7<7+2(x-3)\\4(3+5x)<3x-5(x+2)\end{cases}$; д) $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{3}-3>x-\dfrac{4-2x}{5}\\\dfrac{x}{3}-\dfrac{7}{6}>\dfrac{5x}{3}-\dfrac{11}{6}\end{cases}$.

343 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x+2>-3-5x\\4x+2>-5-4x;\\-3+5x<2x+5\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+7\geqslant -1-5x\\2(x+2)\geqslant -5+4x.\\-2+5x<x+6\end{cases}$

344 Решите двойное неравенство с помощью системы неравенств:

а) $-3\leqslant 2x-3\leqslant 1$; б) $-1<3-5x<0$.

345 Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}2x-7>1\\5-2x>2(1-2x)\end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{1-x}{5}>1\\-4x-3<0\end{array}\right.$; в) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{4-x}{4}<\dfrac{3-x}{3}\\12-5x<x\end{array}\right.$.

346 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases}2x-|x|\leqslant 3\\3x-5\leqslant 7\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x-|2x-1|+1>8\\\big||x|-3\big|>1\end{cases}$.

347 Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенств:

а) $2x-6\leqslant 0$; б) $\dfrac{1}{4}x-y+3<0$; в) $\dfrac{3}{5}x+3y-9>0$; г) $-2\leqslant y\leqslant 3$.

Задачи для самоконтроля к Главе 2

348 Решите систему уравнений: а) $\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=1\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=4{,}5\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{9}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{18}{x+y}-\dfrac{5}{x-y}=-3\end{cases}$.

349 Выясните, при каких значениях b система:

а) $\begin{cases}15x+by=3\\ 5x+10y=1\end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

б) $\begin{cases}bx-8y=12\\ 2x-6y=15\end{cases}$ не имеет решений;

в) $\begin{cases}3x+7y=20\\ bx+14y=15\end{cases}$ имеет единственное решение.

350 Решите систему уравнений с тремя неизвестными:

а) $\begin{cases}x+y=3\\ y+z=7\\ z+x=2\end{cases}$; б) $\begin{cases}y+z-x=2\\ z+x-y=8\\ x+y-z=12\end{cases}$; в) $\begin{cases}x+2y=5\\ y+2z=12\\ z+2x=7\end{cases}$.

351 Найдите $(x_1-y_1)\cdot(x_2-y_2)$, если $(x_1;\, y_1)$; $(x_2;\, y_2)$ решения системы уравнений

$$\begin{cases}|x+y|=1\\ (x^2-y^2)(x-y)=-4\end{cases}.$$

352 Найдите все x, удовлетворяющие условию:

а) $\begin{cases}-3x>x-16\\ \left[\begin{array}{l}3x-1<5\\ 2x-5>7\end{array}\right.\\ 5x+8>4+x\end{cases}$; б) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<10\\ 3-4x<23\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 0\\ 2x-5<19\end{cases}\end{array}\right.$.

353 Найдите наибольшее целочисленное решение системы неравенств:

а) $\begin{cases}6{,}5-1{,}5x>2x-4\\ |x-1|+|x-2|<3-x\end{cases}$; б) $\begin{cases}|x-2|<6-2x\\ |x-3|+|x-4|+|x-5|>10\end{cases}$.

354 Решите систему неравенств графически: $\begin{cases}2|x-1|+|x-3|-1-2x<0\\ \big||x+1|-1\big|\geqslant 3\end{cases}$.

355 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и запишите хотя бы два решения системы:

а) $\begin{cases}3x-y>0\\ x-1<0\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+4y-12\geqslant 0\\ x-y\leqslant -3\end{cases}$; в) $\begin{cases}-3x+y-2<0\\ -x+y\leqslant 0\end{cases}$.

356 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы

$$\begin{cases}|x-1|+y<2\\ 3x+|y+1|\geqslant 0\end{cases}.$$

357 Решите систему $\begin{cases}\dfrac{1}{4}x-y-1=0\\ 3x+y=25\end{cases}$, используя теорему о целочисленных точках графика уравнения.

5. а) $\varnothing$; б) 1; в) $\{0; 1; -1\}$; г) $\{6; 2; -2\}$. **6.** 2960 фунтов стерлингов. **7.** а) 840м³; 1440м³; б) 156 уч. **10.** а) 4; б) −5; в) 5; г) 4. **11.** а) 0,012; б) 0,042; в) $1\frac{1}{3}$; г) $1\frac{1}{6}$; д) −1,6; е) −2,4; ж) $\frac{44}{45}$; з) $\frac{14}{15}$; и) −0,5; к) $-4\frac{1}{3}$; л) $2\frac{1}{8}$; м) $\frac{1}{3}$. **12.** 55. **13.** а) 1,(3); б) 1,9(7); в) −2,(6); г) 2,6(7); д) 3,8(3); е) −17,12(4); ж) 4,8(0); з) −5,6(81). **14.** а) $3\frac{2}{3}$; б) $\frac{13}{99}$; в) $94\frac{289}{900}$; г) $-7\frac{7}{90}$; д) $-7\frac{3}{11}$; е) $17\frac{131}{9900}$. **17.** а) в 8 раз; б) в 27 раз; в) в 64 раза; г) в 125 раз. **18.** а) 4; б) 64; в) 4; г) −1; д) 0,01; е) 4,5; ж) 4; з) 5; и) $\frac{1}{14}$; к) 1; л) 7; м) 0,8. **19.** $1\frac{35}{36}$. **20.** 64. **21.** 42 кг. **22.** а) $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$; б) $\{0; -3; -5\}$. **23.** а) 3км/ч; б) 100 дет./ч; в) 35 км/ч. **25.** а) 0,16; б) $2\frac{1}{3}$; в) 237; г) −14. **26.** $4\frac{2}{3}$. **27.** а) $-10\frac{3}{11}$; б) $1\frac{3}{110}$. **28.** а) −8; б) −98; в) 16; г) 1. **29.** а) 196; б) $\frac{2}{27}$. **34.** а) t^2-2t+1; б) $y^4+10x^2y^2+25x^4$; в) t^3+3t^2+3t+1; г) $y^6-15y^4x^2+75y^2x^4-125x^6$. **35.** а) 8099; б) 2496; в) 4891; г) 3721; д) 1521; е) $898\frac{1}{900}$; ж) 27; з) 9261; и) 6859; к) 63,999; л) 1330. **36.** а) $-5k^3+45k$; б) $-\frac{1}{16}a^3-\frac{1}{2}a^2-a$; в) $m^3+6m^2+12m+8$; г) $\frac{1}{4}n^4-2n^2h^2+4h^4$; д) $\frac{8}{9}d^4-81d$; е) $1-1\,000\,000q^6$. **37.** а) $-10d^3-t$; б) $\frac{25x^2+y^2}{25x^2-y^2}$; в) $4b-3a$; г) $\frac{\frac{1}{4}n^5+5m^2}{5m^2-\frac{1}{4}n^5}$; д) $2k-5l$; е) $\frac{0{,}16q^2-0{,}24qr^2+0{,}36r^4}{0{,}4q-0{,}6r^2}$; ж) $\frac{1}{(7c-z)^2}$; з) $\frac{1}{9s+2v}$. **38.** а) $(15+a)(a-b)$; б) $(c+1)(a+2)^2$; в) $(s+c)(c^2+4sc+s^2)$; г) $3m^5(4x^2-3y^3)^2$; д) $(mn^2+2p^3)^3$; е) $(12ab^2-17p^3q^4)(12ab^2+17p^3q^4)$; ж) $(4x+0{,}1y^5)(16x^2-0{,}4xy^5+0{,}01y^{10})$; з) $(8m^2-2n^3)(64m^4+16m^2n^3+4n^6)$. **39.** а) $(a-9)(a-1)$; б) $(b-11)(b-1)$; в) $(c-1{,}5)(c+2)$. **41.** а) 896; б) 9801; в) 1030301; г) 1331,125. **42.** а) $-a^4+0{,}04a^2$; б) b^6-9c^4; в) $d^6+4d^3p^2+4p^4$; г) $\frac{9}{16}r^4-\frac{3}{2}r^2q^4+q^8$; д) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$; е) $125s^9+15s^6z^2+\frac{3}{5}s^3z^4+\frac{1}{125}z^6$. **43.** а) v^6-v^3; б) $\frac{1}{125}n^3-\frac{1}{5}m$; в) $x^6-0{,}9x^4y+0{,}27x^2y^2$. **44.** а) $3d(d-3)(d+3)$; б) $(z-1)(z-6)(z+6)$; в) $(v-h)(v+h+8)$; г) $m(m+5p^2)^2$; д) $(7aq^2-5n^3l)(49a^2q^4+35aq^2n^3l+25n^6l^2)$; е) $(b^4-\frac{1}{3}k)^3$. **45.** а) $(k-4)(k+10)$; б) $(5b-4t)(5b+2t)$. **46.** а) xy^2; б) $\frac{4q^2-0{,}2qm^3+0{,}01m^6}{2q-0{,}1m^3}$; в) $\frac{25(x^8+y^5)}{x^8-y^5}$; г) $\frac{1}{\left(\frac{1}{9}c+9x\right)^2}$. **51.** а) −3; б) −15; в) $\varnothing$; г) 0; д) −9; е) 5; ж) 0,5; з) 13. **52.** а) $\{\pm2; 15\}$; б) $\{\pm 4; 8\}$; в) $\{-2; -9\}$; г) $\{3; 5\}$. **53.** а) $\{8; -22\}$; б) $\varnothing$; в) $\{4; -8\}$; г) $\varnothing$; д) 24; е) $\{2; -1\}$; ж) $\{-1; 3\}$; з) $\{-8; -3{,}2\}$. **55.** а) $\{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$; б) $\{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$; в) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; г) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. **56.** а) $[-0{,}3;+\infty)$; б) $\left[\frac{5}{8};+\infty\right)$; в) $(0{,}8;+\infty)$; г) $(-\infty;-0{,}5]$; д) $\left(-\infty;\frac{3}{23}\right]$; е) $\varnothing$; ж) $(-\infty;+\infty)$; з) $\left(-\infty;-3\frac{1}{3}\right]$; и) $(6{,}4;+\infty)$; к) $(4;+\infty)$. **58.** а) $-\frac{1}{30}$; б) $\frac{9}{14}$; в) любое число; г) 56; д) $4\frac{9}{22}$; е) $\{0{,}6; 0{,}2\}$; ж) $\varnothing$; з) 0,2; и) $\{0; 2\}$; к) $\left\{-\frac{1}{7}; 11\right\}$. **59.** а) $\{-7; \pm3\}$; б) $\{\pm1; 5\}$; в) $\{2; 6\}$; г) $\{-6; -3\}$. **60.** а) $(-\infty; 0{,}5]$; б) $(-\infty; 0{,}05)$; в) $(-\infty;-3)$; г) $(4;+\infty)$; д) $\left(-\infty;\frac{14}{15}\right]$; е) $(-\infty;-25)$; ж) $\varnothing$; з) $(-26{,}25;+\infty)$; и) $(-\infty; 0{,}75)$; к) $\varnothing$. **69.** $k=-0{,}25$. **70.** а) проходит; б) не проходит; в) проходит; г) не проходит. **71.** а) $(-1; -4)$; б) $(-2; -2)$. **77.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; г) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; д) $(-\infty;0)\cup(0;8)\cup(8;+\infty)$; е) $\left(-\infty;1\frac{1}{3}\right)\cup\left(1\frac{1}{3};4\right)\cup(4;+\infty)$. **87.** а) $\{-2{,}5; 7{,}5\}$; б) $\varnothing$; в) $\left\{-1; 1\frac{2}{3}\right\}$ г) $\varnothing$; д) 6,05;

е) $\{-2; 2\}$. **88.** а) $\left\{-6\frac{2}{3}; 4\right\}$; б) $\{-10; 6\}$; в) $\varnothing$; г) $\{-6{,}5;\ 3\frac{3}{4}\}$. **90.** а) $[-1;\ \frac{1}{4}]$; б) $(-\infty; -2)\cup(2\frac{1}{6}; +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right)\cup(5; +\infty)$; е) $(1; +\infty)$; ж) $\left[-20; 1\frac{3}{5}\right]$; з) $\left[-3\frac{1}{5}; 26\right]$; и) $\varnothing$; к) $\varnothing$; л) $(-\infty;\ \frac{3}{5}]\cup[9\frac{2}{3}; +\infty)$; м) $\varnothing$. **91.** а) $\varnothing$; б) $(-\infty; -21{,}5)\cup\left(2\frac{7}{16}; +\infty\right)$. **96.** а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$; г) $\left\{-\frac{1}{11}; 3\frac{10}{13}\right\}$; д) $\{1{,}2\}$; е) $\varnothing$. **99.** а) $(-6; -2)$; б) $(-\infty; -1{,}4)\cup(2{,}4; +\infty)$; в) $\varnothing$. **100.** а) $\left(-2;\ 2\frac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty; -17]\cup\left[3\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -3)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty; 3)\cup[5; +\infty)$. **102.** а) 4; б) 91; в) $-\frac{7}{17}$; г) $-0{,}16$. **103.** а) 9; б) 45. **104.** а) 1,4; б) 2,8. **105.** 1) 4; 2) 216; 3) 2; 4) 5; 5) 3. **106.** а) $a^2+4ab+4b^2$; б) $x^6-6x^3y+9y^2$; в) $-m^3-3m^2k-3mk^2-k^3$; г) $64+48d^2+12d^4+d^6$. **107.** а) $3a^3-48a$; б) $2x^5-2x$; в) $4t-t^3$; г) $9c-c^7$; д) n^3+125; е) $8-a^3$. **108.** а) $z^6-1\,000\,000$; б) a^6-1. **109.** а) $(3x+y)^2$; б) $(3a+5b)^2$; в) $(x-2y)^2$; г) $(3-4a)^2$; д) $(k^2-1)^2$; е) $(4s^2+6)^2$; ж) $(4+d)^3$; з) $(6x-y)^3$; и) $(m+5)^3$; к) $(mn-1)^3$. **110.** а) $(7+3a)(x+y)$; б) $4(2d-3)(d-b)$; в) $(11a-12b)(11a+12b)$; г) $(5c-9d)(5c+9d)$; д) $(6+a)(36-6a+a^2)$; е) $(n^2-4)(n^4+4n^2+16)$. **111.** а) $(a-7)(a+3)$; б) $(1-d)(5+d)$; в) $(c+4)(c+6)$; г) $(a-1)(a+2)$. **112.** а) $(c+4)(c+6)$; б) $(x-8)(x-4)$; в) $(a-5)(a+6)$; г) $(y+4)(y+9)$. **113.** а) -6; б) $\{-0{,}5;\ 1{,}5\}$; в) $\{\pm0{,}4\}$; г) $\left\{0; \frac{1}{3}\right\}$; д) $\{-0{,}5;\ 3\}$; е) $\left\{-\frac{1}{3}; -2\right\}$. **114.** а) 8; б) $\{7; 9\}$; в) $\{4; -5\}$. **115.** а) $(-\infty; 25)$; б) $(-\infty; -0{,}27)$ в) $(-\infty; 0{,}2]$; г) $[-20; +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty; -2]$; ж) $\left[\frac{4}{9}; +\infty\right)$; з) $(-\infty; -1)$. **116.** а) $(-12; 4)$; б) $(-\infty;\ 1]\cup[\ 4; +\infty)$; в) $(-\infty; -32)\cup\left(-\frac{8}{9}; +\infty\right)$ **123.** а) 33 уч.; б) 60 000 000. **128.** а) $a=\frac{C}{n}$ $(n\neq0)$, $a=\frac{C}{n}$ $(a\neq0)$; б) $a=\frac{P-2b}{2}$, $b=\frac{P-2a}{2}$; в) $r=a-bc$, $b=\frac{a-r}{c}$ $(c\neq0)$, $c=\frac{a-r}{b}$ $(b\neq0)$; г) $a=\frac{V}{bc}$, $b=\frac{V}{ac}$, $c=\frac{V}{ab}$ $(abc\neq0)$. **129.** числа 5 и 3. **131.** а) является; б) не является. **133.** а) $\left(x; \frac{x+3}{6}\right)$, x – любое число или $(6y-3; y)$, y – любое число; б) $\left(x; \frac{11x-3}{2}\right)$, x – любое число или $\left(\frac{2y+3}{11}; y\right)$, y – любое число; в) $\left(x; \frac{9-5x}{4}\right)$, x – любое число или $\left(\frac{9-4y}{5}; y\right)$, y – любое число; г) $\left(x; \frac{x}{5}\right)$, x – любое число или $(5y; y)$, y – любое число; д) $\left(\frac{13}{4}; y\right)$, y – любое число; е) $\left(x; \frac{-7}{3}\right)$, x – любое число. **134.** а) $\left(x; \frac{6-x}{4}\right)$, x – любое число или $(6-4y; y)$, y – любое число; б) $(a; -a)$, a – любое число; в) $\left(x; \frac{3x+2}{2}\right)$, x – любое число или $\left(\frac{2y-2}{3}; y\right)$, y – любое число; г) нет решений; д) (x, y), x, y – любые числа. **135.** точкиВ и С. **137.** а) вся плоскость; б) пустое множество. **139.** а) 6; б) 24; в) 25; г) 3; д) 32. **142.** а) $(x, 6x+4)$, x – любое число или $\left(\frac{y-4}{6}; y\right)$, y – любое число; б) $\left(x; \frac{1-5x}{6}\right)$, x – любое число или $\left(\frac{1-6y}{5}; y\right)$, y – любое число; в) $(0; y)$, y – любое число. **144.** а) 28 или 30. **147.** 8. **149.** а) является; б) не является. **150.** (8; 2). **151.** а) $(-4; -2)$; б) $(1; -0{,}5)$; в) $\left(x; \frac{x-2{,}5}{2}\right)$, x – любое число или $(2y+2{,}5; y)$, y – любое число; г) нет решений. **154.** а) (5; 5); б) $(6; -2)$. **155.** 3 декабря 1999 года. **156.** а) минус; б) плюс; в) минус. **157.** 137. **159.** а) изменяется от -3 до 3; б) изменяется от -7 до -3; в) изменяется от -9 до -1; г) изменяется от 1 до 7; д) равно -3. **160.** а) (1; 3); б) нет решений; в) $(x; x+1)$, x – любое число или $(y-1; y)$, y – любое число. **162.** а) плюс; б) минус; в) минус. **163.** 43.

164. может. **166.** а) $k = 2$; б) $k = 2$, $b = 3$; в) k – любое число, кроме -7. **168.** а) нет решений; б) одно решение; в) бесконечно много решений; г) одно решение; д) нет решений; е) бесконечно много решений. **169.** а) $a = -1$ – нет решений, $a = 1$ – бесконечно много решений; б) $a = 1$ – нет решений, $a = 0$ – бесконечно много решений; в) $a = \frac{1}{2}$, $b \neq \frac{1}{2}$ – нет решений, $a = 0$ – бесконечно много решений, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ – бесконечно много решений. **170.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{124}{99}$; в) $-\frac{73}{90}$; г) $\frac{68\,345}{198}$. **171.** а) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$; б) 78 477. **172.** а) 1; б) 75. **173.** а) одно решение; б) бесконечно много решений; в) нет решений. **174.** $a = 1$, $a = -1$ – бесконечно много решений. **175.** а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{38}{33}$. **176.** 81. **178.** а) $a = 3$: $\left(\frac{11}{5}; \frac{1}{5}\right)$; б) $a = 2$, $b \neq 2$: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $a \neq 2$, $b = 2$: $(1; 0)$; в) $a = b \neq 3$: $\left(\frac{2}{a-3}; \frac{a-5}{a-3}\right)$, $a = 5$, $a \neq b$: $(1; 0)$. **179.** 0. **181.** а) $x = -1$; $y = -3$; б) $a = 1$; $b = 1$; в) $m = -1$; $n = -4$; г) $x = -1$; $y = 1$. **182.** а) $(-0,2; -1)$; б) $(2; -1)$; в) нет решений; г) $(0,2; 0,2)$. **183.** а) $(-2; -5)$; б) $(2; -1)$; в) $\left(14; \frac{38}{3}\right)$; г) $(6; -1)$. **184.** а) $(13; 32)$; б) $(4; -3)$. **185.** а) $y = 3x - 4$; б) $y = -0,5x + 2$. **186.** а) $\left(-\frac{1}{11}; -\frac{1}{7}\right)$; б) $\left(\frac{13}{60}; -\frac{13}{38}\right)$; в) $(2; -1)$. **187.** 5. **188.** 4. **189.** а) $2^2 \cdot 503$; б) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. **190.** а) $(2; -1)$; б) $\left(\frac{7}{13}; -\frac{5}{26}\right)$; в) нет решений. **191.** а) $(0,5; 1)$; б) $(0,2; -1)$. **192.** а) $2 \cdot 17$; б) $2 \cdot 7 \cdot 31$. **193.** 365 дней. **194.** $(3; 2)$. **195.** 200 руб. **196.** $x = 32 + 49t$, $y = 79 + 121t$, t – любое целое число. **197.** 1000 руб. **198.** 9,75. **199.** $v_{\text{лодки}} = 20,5$; $v_{\text{реки}} = 1,5$. **200.** 2,5; 1,5. **201.** 100 рублей – маленькие, 200 рублей – большие. **202.** 15 белых и 20 желтых. **203.** 104 000 и 294 000. **204.** 4. **205.** 8. **206.** $v_1 = 10$ км/ч, $v_2 = 15$ км/ч. **207.** 36. **208.** 221, 237, 247, 321. **209.** а) 13; б) 2,9; в) 0,12; г) -2; д) 0,7; е) $-0,9$; ж) 0,25; з) $-1,11$; и) 4,44. **210.** а) 3; -3; б) $\varnothing$; в) 0; г) 0,8; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$. **211.** а) 2; -6; б) 4,5; -2; в) -2; г) $-4,5$; $\frac{1}{4}$; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$. **212.** 5; 7. **213.** 3 пастуха; 12 коров. **214.** 28. **215.** а) 1; 5; б) -10; -2; в) $-\frac{2}{3}$; -14; г) $\varnothing$. **216.** 121; 141. **217.** 240 руб. **218.** 40 центов. **219.** $-\frac{1}{5}$. **220.** $(-1; 1)$. **221.** а) $(2; -1)$; б) $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{7}{12}\right)$; в) $(0,2; 0,2)$; $(1; -1)$; г) $(1; -0,5)$; $\left(\frac{13}{11}; -\frac{5}{22}\right)$. **222.** а) $(1; 1)$; $(-2,6; 3,4)$; б) $\varnothing$; в) $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right)$; $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$; г) при $y \geqslant 0$ система имеет бесконечно много решений: $(-0,5 + 1,5y; y)$; при $y < 0$ система не имеет решений. **223.** а) $\varnothing$; б) $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{18}\right)$; $\left(-\frac{1}{12}; \frac{1}{18}\right)$. **224.** 71 и 72. **225.** а) 36; б) 1800; в) 7250; г) 2142. **226.** $B = \{6; 12; 36\}$; $C = \{12; 16; 32; 36\}$; а) $B \cap C = \{12; 36\}$, б) $B \cup C = \{6; 12; 16; 32; 36\}$, **227.** а) $(-\infty; -2,5)$; б) $(-0,6; +\infty)$; в) $(-\infty; -20]$; г) $[14; +\infty)$. **228.** а) $[3; +\infty)$, $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -5)$, $(-\infty; -5]$; в) $(3; 9)$, $(-\infty; +\infty)$; г) $[-9; -3]$, $(-\infty; +\infty)$; д) $\{10\}$, $(-\infty; +\infty)$; е) $\varnothing$, $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **229.** а) $(1; 6)$; $(-7; -30)$; б) система имеет бесконечно много решений: $(0,5 - 1,5y; y)$; в) $(3; 1)$; $(3; -1)$. **230.** а) $(-0,5; +\infty)$; б) $(0,6; +\infty)$; в) $(-\infty; -20]$. **231.** а) $[4; +\infty)$, $(1; +\infty)$; б) $(-3; 3)$, $(-\infty; +\infty)$; в) $\{0\}$, $(-\infty; +\infty)$. **232.** а) $(1; 2)$; б) $(1; 1)$; в) $\left(\frac{11}{5}; -\frac{9}{5}\right)$; $\left(\frac{19}{5}; -\frac{21}{5}\right)$; $(1; -1)$; $\left(\frac{13}{5}; -\frac{17}{5}\right)$; г) $\left(\frac{16}{3}; -\frac{31}{9}\right)$; $\left(-\frac{5}{3}; \frac{11}{9}\right)$. **233.** 6. **234.** сыну – 12 лет, отцу – 36 лет. **235.** $(1; 2; 2)$. **236.** а) система имеет бесконечно много решений: $(x; 19 - 2x; x - 14)$; б) $\varnothing$; в) система имеет бесконечно много решений: $(x; 2 - 5x; 1 - 3x)$. **237.** а) $\left(\frac{2-a}{9}; \frac{2a+2}{9}; \frac{2a-1}{9}\right)$; б) при $a = 1$ – бесконечно много решений: $(x; 2x - 1; x)$, при $a \neq 1$ решений нет. **238.** сыну – 10 лет, отцу – 35 лет, деду – 60 лет. **239.** 12. **240.** а) 36; б) 38. **241.** {3; 2; 1}. **242.** 10. **243.** а) $[6;+\infty)$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$. **244.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $(-\infty;-5)\cup(-3;+\infty)$; в) $(-\infty;5)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-\infty;+\infty)$; е) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. **245.** 1. **246.** 0. **247.** $m=34$, $n=5$; $m=6$, $n=33$; $m=-24$, $n=3$; $m=4$, $n=-25$. **248.** 6. **249.** а) 4, 5, 6; б) 3, 4, 5, 6, 7. **250.** а) 2300 рублей; б) 3200, 2300 и 1300 рублей. **253.** а) $(5;+\infty)$; б) $[2;5)$; в) $\varnothing$; г) $(-\infty;2]$. **255.** а) $[2;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$; г) $(-\infty;5)$. **256.** а) $[2;5)$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty;2)$; г) $\varnothing$. **257.** а) $(-\infty;2)\cup[3;+\infty)$; б) $(1;+\infty)$; в) $[-1;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$. **258.** а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $\left[\frac{5}{2};3\right)\cup(4;5)$. **259.** а) $[-6;-5)$; б) $[-10;2)$; в) $[8;11]$; г) $\left(-\frac{1}{6};0\right)$; д) $(-5;4]$; е) $\left[-4;\frac{1}{8}\right)$. **260.** а) положительный; б) отрицательный; в) нулевой; г) отрицательный. **262.** а) положительный; б) отрицательный. **264.** $d<a<b<c$. **265.** 6 ручек. **266.** а) НОД = 1, НОК = 6; б) НОД = 2, НОК = 8; в) НОД = 4, НОК $=2^4\cdot3^2\cdot7=1008$; г) НОД = 6, НОК $=2^4\cdot3^2\cdot5=720$. **267.** а) $-\frac{ab}{6}$; б) $n^2+0{,}3n$. **268.** а) $\frac{2b}{3x}$; б) ax; в) 1. **269.** а) $\varnothing$; б) $(-\infty;1]$; в) $(-\infty;3)$; г) $\varnothing$. **270.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $[1;+\infty)$; в) $(4;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$. **271.** а) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; б) $(-\infty;+\infty)$. **273.** а) отрицательный; б) положительный. **275.** а) $\frac{3a}{5b}$; б) $\frac{4m^2y}{x}$; в) $\frac{4b}{15a}$. **276.** $[5;15)$. **277.** а) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$; в) $(-\infty;-4)\cup(6;+\infty)$. **279.** а) $\left[\frac{1}{2};9\right)$; б) $(3;+\infty)$; в) $(6;+\infty)$. **281.** $\frac{5}{4}$. **282.** 37,5 %. **283.** 7. **284.** $(2x+1)(2x-3)(2x+3)$. **285.** а) да; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) да. **286.** а) является, $\frac{123}{1000}$; б) является, $\frac{1010010001}{1000000000}$; в) является, $\frac{300}{99}=\frac{100}{33}$; г) является, $\frac{1222}{990}=\frac{611}{495}$; д) не является; е) является, $\frac{2523}{999}=\frac{841}{333}$. **287.** а) $(2;+\infty)$; б) $\{4\}$; в) $\varnothing$. **289.** $-\frac{4}{7}$. **290.** 72 %. **291.** $(a+c)(b+c)(b-a)$. **292.** а) да; б) нет; в) да; г) да; д) да; е) нет. **293.** а) является, $\frac{1234}{1000}=\frac{617}{500}$; б) является, $\frac{1020030004}{1000000000}=\frac{255007501}{250000000}$; в) является, $\frac{210}{99}=\frac{70}{33}$; г) является, $\frac{4317}{999}=\frac{1439}{333}$; д) не является; е) является, $\frac{8889}{900}=\frac{2963}{300}$. **294.** 18 литров. **301.** 9,87 м. **302.** 12 500 рублей. **303.** –2. **304.** около 60 учащихся. **306.** а) 2; б) 7; в) 1. **310.** 184 900 рублей. **312.** а) 3; б) 1; в) 7. **313.** 4 кг. **318.** 3,5. **320.** 1440 рублей. **321.** а) неверно; б) неверно; в) верно; г) неверно; д) неверно; е) верно. **322.** 30 зубцов. **323.** $a-b$; $\frac{9}{8}$. **324.** а) 5,(6); б) –0,(4); в) 0,58(3); г) –0,3(8); д) 0,(06); е) 2,(428571). **325.** а) $\frac{11}{9}$; б) $-\frac{1222}{99}$; в) $-\frac{4}{3}$; г) $\frac{2982}{990}=\frac{497}{165}$. **328.** а) 0,(6); б) 2,(7); в) –0,41(6); г) 0,5(7); д) 0,(13); е) 0,(142857). **329.** а) $-\frac{2}{9}$; б) $-\frac{111}{90}=-\frac{37}{30}$; в) $\frac{155}{99}$; г) $\frac{122222}{9900}=\frac{61111}{4950}$. **332.** а) нет; б) да. **333.** –2. **337.** 4. **338.** а) $(1;-1)$; б) $(-1;1)$. **339.** $\left(-\frac{7}{8};-\frac{5}{8}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$; в) $(-1;9)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $\varnothing$. **340.** а) $(1;1)$, $(1;-1)$; б) $\left(\frac{8}{7};\frac{3}{7}\right)$, $\left(\frac{4}{7};\frac{5}{7}\right)$; в) $(-1;2)$; г) $(a;5-a)$, $a\geqslant3$. **341.** а) 30 км/ч и 50 км/ч; б) 7 и 5 человек; в) 40 л, 60 л; г) 69 км; д) 112 и16; е) 2км. **342.** а) $(0{,}5;+\infty)$; б) $\varnothing$; в) $\left(-4;\frac{16}{3}\right]$; г) $\varnothing$; д) $\left(-\infty;-\frac{18}{11}\right)$. **343.** а) $\left(-\frac{5}{7};\frac{8}{3}\right)$; б) $[-1;2)$. **344.** а) $[0;2]$; б) $(0{,}6;0{,}8)$. **345.** а) $(-1{,}5;+\infty)$; б) $(-0{,}75;+\infty)$; в) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **346.** а) $(-\infty;3]$; б) $(4;+\infty)$. **348.** а) $(1;2)$; б) $(5;4)$. **349.** а) $b=30$; б) $b=\frac{8}{3}$; в) $b\neq6$. **350.** а) $(-1;4;3)$; б) $(10;7;5)$; в) $(1;2;5)$. **351.** –4. **352.** а) $(-1;2)$; б) $(-5;12)$. **353.** а) 1; б) 0. **354.** $[3;6)$. **357.** $(8;1)$.

Предметный указатель

График линейного уравнения стр.50

Графическое решение линейного неравенства с двумя неизвестными............................стр. 107

Дизъюнкция высказываний .... стр. 26

Достаточное условие .... стр. 12

Конъюнкция высказываний .... стр. 26

Критерий.. стр. 21

Линейное неравенство с одним неизвестным .... стр. 91

Линейное неравенство с двумя неизвестными.............................стр. 105

Линейное программирование ....стр. 108

Линейное уравнение с двумя неизвестными.............................. стр. 48

Необходимое условие.................... стр. 12

Общее решение линейного уравнения с двумя неизвестными .... стр. 48

Признак .... стр. 19

Равносильные предложения .... стр. 13

Равносильные преобразования систем неравенств .... стр. 92

Равносильные преобразования систем уравнений............................ стр. 67

Равносильные системы уравнений стр.66

Решение линейного уравнения с двумя неизвестными .... стр. 48

Решение линейного неравенства с двумя неизвестными ....стр. 105

Решение линейного неравенства с одним неизвестным:

- открытый луч .... стр. 91
- замкнутый луч.......................... стр. 91
- числовая прямая .... стр. 91
- пустое множество .... стр. 91

Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.... стр. 55

Решение системы неравенств........ стр. 91

Решение совокупности неравенств .... стр. 91

Решить линейное уравнение с двумя неизвестными стр.48

Свойство .... стр. 19

Система двух уравнений с двумя неизвестными стр.54

Система неравенств .... стр. 90

Система трёх уравнений с тремя неизвестными .... стр. 82

Совокупность неравенств .... стр. 90

Способ алгебраического сложения .... стр. 68

Способ подстановки .... стр. 67

Таблицы истинности .... стр. 34

Формулы де Моргана .... стр. 29

Оглавление

Глава 1. Язык и логика 3
§ 1. Искусство математических рассуждений 3
1.1.1. Искусство задавать вопросы 3
1.1.2. Необходимость и достаточность 12
1.1.3. Свойства и признаки. Критерии 18
§ 2. Сложные предложения 25
1.2.1. Сложные высказывания 25
1.2.2.* Законы логики для сложных высказываний 34
Экспресс – тест №1 40
Задачи для самоконтроля к Главе 1 42
Глава 2. Системы линейных уравнений и неравенств 47
§1. Системы линейных уравнений 47
2.1.1. Линейное уравнение с двумя неизвестными и его график 47
2.1.2. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Графическое решение системы 54
2.1.3.* Количество решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 61
2.1.4. Алгебраические методы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными: способ подстановки и способ сложения 66
2.1.5. Математические модели задач и системы линейных уравнений с двумя неизвестными 71
2.1.6. Системы двух линейных уравнений с модулями 77
2.1.7.* Системы линейных уравнений с тремя и более неизвестными 82
Экспресс – тест №2 87
§2. Системы и совокупности линейных неравенств 90
2.2.1. Системы и совокупности линейных неравенств с одним неизвестным 90
2.2.2.* Системы линейных неравенств с одним неизвестным с модулями 98
2.2.3. Линейные неравенства с двумя неизвестными и их системы. Графическое изображение множества их решений 104
2.2.4.* Системы линейных неравенств с двумя неизвестными с модулями 112
Экспресс – тест №3 117
Задачи для самоконтроля к Главе 2 120
Ответы 123
Предметный указатель 127

Учебное издание

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

8 класс

В трех частях

Часть 1 (6+)

Художники *П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов*

Подписано в печать 05.04.2017. Формат 84x108/16. Объем 8,0 п. л. Усл. печ. л. 13,44.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 5000 экз. Заказ № м4508.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 1
тел. (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70. E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru